среднее
профессиональное
образование

В.П. Омельченко
Э.В. Курбатова

МАТЕМАТИКА

5-е издание

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723
КТК 11
О-57

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор
А.М. Лерер;
кандидат физико-математических наук, доцент
Г.В. Антоненко

Главы 1, 3 написаны
кандидатом физико-математических наук
Н.В. Карасенко

Омельченко В.П.

О-57 Математика: учеб. пособие / В. П. Омельченко, Э. В. Курбатова. — Изд. 5-е, стер. — Ростов н/Д : Феникс, 2011. — 380 с. — (Среднее профессиональное образование).

ISBN 978-5-222-17602-3

Содержание учебного пособия соответствует примерной программе по математике для специальностей среднего профессионального образования. Подробно рассмотрены основы дискретной математики, математический анализ, основные численные методы, теория вероятностей и математическая статистика. Изложение теоретического материала сопровождается большим количеством примеров и задач. В конце каждого раздела приводятся задания для самостоятельной работы.

Пособие предназначено для учащихся всех специальностей средних специальных учебных заведений.

ISBN 978-5-222-17602-3

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723

Предисловие

Настоящее учебное пособие написано в соответствии с программой по математике, утвержденной Управлением среднего профессионального образования Минобразования РФ в 2002 году. Программа предназначена для реализации государственных требований к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по специальностям среднего профессионального образования и является единой для всех форм обучения.

Учебное пособие состоит из четырех глав.

В первой главе рассматриваются основы дискретной математики. Даются определения множества, способы задания множеств, операции над множествами, типы отношений, а также основные понятия теории графов.

Вторая глава посвящена математическому анализу. Подробно рассматриваются основы дифференциального и интегрального исчисления. Приводится много примеров решения задач на вычисление пределов функций, вычисления производных и интегралов, нахождения частных производных. В этой же главе рассматривается решение обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. В конце главы приведены основы числовых и функциональных рядов.

В третьей главе рассмотрены методы численного интегрирования и дифференцирования, а также численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

Четвертая глава посвящена теории вероятностей и математической статистики. Даны понятия случайного события и его вероятности, рассмотрены законы описания случайных величин и их характеристики, приведены формулы определения математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения дискретной случайной величины.

Большое количество решенных примеров, а также задач для самостоятельного решения позволяют использовать данное учебное пособие не только для изучения теоретических основ дисциплины, но и как задачник по общему курсу математики для средних специальных учебных заведений.

По итогам изучения дисциплины студент должен:

- **знать**:
  - — основные понятия и методы дискретной математики, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики;
  - — основные численные методы решения прикладных задач;
- **уметь**:
  - — решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегральиого исчисления;
  - — решать обыкновенные дифференцнальные уравнения и простейшие уравнения в частных производных;
  - — находить значения функций с помощью ряда Маклореиа;
  - — решать простейшие задачи, используя элементы теории вероятностей;
  - — находить функцию распределения случайиой величины;
  - — использовать метод Эйлера для численного решения дифференциальных уравнеиий;
  - — находить аналитическое выражение производной по табличным данным.

Авторы приносят благодарность рецензентам: профессору А.М. Лереру н доценту Г.В. Антоненко.

Глава 1

Основы дискретной математики

1.1. Множества и отношения

В данном разделе для сокращенной записи будем использовать следующие символы:

- $a \in A$ — a является элементом множества A;
- $a \notin A$ — a не является элементом множества A;
- $\varnothing$ — пустое множество;
- $\{a, d, c\}$ — множество, состоящее из трех элементов a, d и c;
- $\{x | P(x)\}$ — множество, состоящее из таких элементов x, для которых истинно утверждение $P(x)$;
- $A \cup B$ — объединение множеств A и B;
- $A \cap B$ — пересечение множеств A и B;
- $A \subset B$ — A является подмножеством B;
- $A \setminus B$ — разность множеств A и B;
- $\overline{A}$ — дополнение множества A до универсального множества;
- U — универсальное множество;
- $a\,R\,b$ — между a и b существует бинарное отношение R.

1.1.1. Основные понятия

В тех случаях, когда невозможно дать четкого определения какому-либо предмету или явлению, люди пользуются *понятиями*. Основные понятия не определяются. У каждого из нас существуют интуитивные представления о них, основанные на личном опыте.

Введем понятие *множества*.

Множеством называют совокупность объектов, объединенных по определенному признаку.

О множестве известно, что оно состоит из элементов. **Например**, множество студентов определенного колледжа, множество зрителей данного театра, множество слушателей в аудитории и т.п.

Множества обозначают заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, ..., с индексами или без них. Элементы множества обозначают малыми латинскими буквами a, b, c, ..., y, z в случае, если речь идет о множестве вообще, или же за ними сохраняют конкретные обозначения. Принадлежность элемента a к множеству N записывается так: $a \in N$ (читается «a принадлежит N»). Непринадлежность элемента b к множеству N обозначается $b \notin N$ (читается «b не принадлежит N»).

Способы задания множеств:

- *Перечислением* всех объектов, входящих в множество. Таким способом можно задать лишь конечные множества. Обозначение — список в фигурных скобках. Например, множество натуральных чисел, делителей числа 6:

$$N = \{1, 2, 3, 6\}.$$

- *Описанием* характеристических свойств, которыми обладают все элементы множества. Обозначается:

$$N = \{x| \ P(x)\} \text{ или } N = \{x\text{: } P(x)\}.$$

Например, множество $N = \{1, 2, 3, 6\}$ можно записать и таким образом: $N = \{x| \ x$ — натуральное число, делитель числа $6\}$.

Свойство P состоит в том, что объект есть натуральное число, на которое делится число 6.

Приведем еще примеры множеств, встречающихся в школьном курсе математики:

$L = \{(x, y)| \ (x, y) \in R, \ ax + by = c\}$ — прямая линия,

$M = \{(x, y)| \ (x, y) \in R, \ ax + by \leq c\}$ — полуплоскость, содержащая начало координат, если $c \geq 0$. (Напомним, что R — множество действительных чисел.)

◆ Пример 1.1

Задать различными способами множество N всех натуральных чисел: 1, 2, 3, 4, 5, ...

Решение:

Перечислением множество N задать нельзя, так как оно бесконечно. Множество можно задать описанием характеристического свойства элементов множества:

$N = \{x | x$ — целое положительное число$\}$.

◆ Пример 1.2

Оценить корректность определения множества A:

$A = \{1, 2, 3, 3, 4\}$.

Решение:

При перечисленин элементов множества не следует указывать один и тот же элемеит несколько раз. Корректное определение: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Множество A называют *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Обозначается $A \subset B$.

Например: $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 2, 4, 8, 12, 16\}$. $A \subset B$.

Среди всех множеств выделяется *пустое множество*, которое не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначается знаком $\varnothing$. Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества.

Если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что множества A и B равны ($A = B$).

1.1.2. Операции над множествами

Для наглядного представления операций над множествами применяют своего рода диаграммы. Построение диаграммы заключается в изображении большого прямоугольника, представляющего универсальное множество U, а внутри него — *кругов Эйлера*, представляющих множества.

Вместо кругов Эйлера определенные множества изображают любые другие замкнутые фигуры, и такую иллюстрацию называют *диаграммами Венна*.

Для рассуждений, связанных с множествами, будем использовать язык *диаграмм Эйлера–Венна*.

Область, представляющую то подмножество, которое нас интересует, отметим штрихами. На рисунке 1.1 первая диаграмма соответствует универсальному множеству U, вторая — его пустому подмножеству, третья — произвольному подмножеству A.

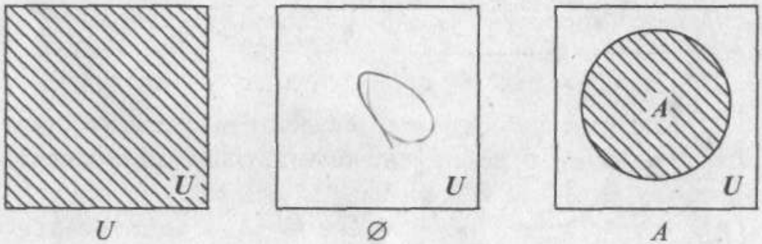


Рис. 1.1

Объединением множеств A_1 и A_2 называют множество B, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A_1, A_2 (рис. 1.2). Тот факт, что B есть объединение A_1 и A_2, записывается:

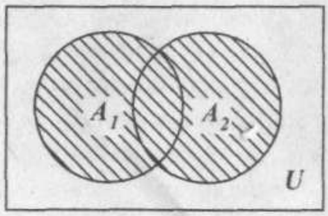


Рис. 1.2

$$B = A_1 \cup A_2,$$

$$B = \{x \mid x \in A_1 \text{ или } x \in A_2\}.$$

На рисунке 1.2 вся заштрихованная область представляет собой множество B.

Пересечением множеств A_1 и A_2 называется множество B, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат и множеству A_1, и множеству A_2 одновременно (рис. 1.3).

То, что B есть пересечение A_1 и A_2, записывают так:

$B = A_1 \cap A_2$,

$B = \{x | x \in A_1 \text{ и } x \in A_2\}$.

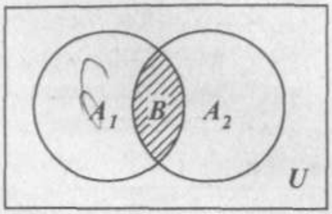


Рис. 1.3

Разностью множеств A_1 и A_2 называют множество B, состоящее только из тех элементов множества A_1, которые не содержатся в A_2 (рис. 1.4).

Разность множеств обозначается:

$B = A_1 \backslash A_2$,

$B = \{x | x \in A_1,\ x \notin A_2\}$.

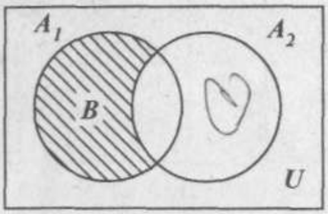


Рис. 1.4

Разность — операция строго некоммутативная. В общем случае $A_1 \backslash A_2 \neq A_2 \backslash A_1$.

Пусть U — универсальное множество такое, что все рассматриваемые множества являются его подмножествами.

Дополнением (до U) множества A называется множество $\overline{A}$ всех элементов, не принадлежащих A, но принадлежащих универсальному множеству U (рис. 1.5).

$\overline{A} = U \setminus A$.

Рис. 1.5

◆ Пример 1.3

Пусть X — множество студентов I курса одного факультета университета, учащихся на «отлично» и «хорошо», а Y — множество студентов I курса другого факультета университета, учащихся аналогично. Определить множество $X \cup Y$.

Решение:

$X \cup Y$ — это множество студентов I курса двух факультетов, успевающих на «хорошо» и «отлично».

◆ Пример 1.4

Пусть X — это множество государственных предприятий с годовым оборотом b не ниже a. Пусть Y — это множество предприятий с годовым оборотом b не выше c. (Пусть $a < c$.) Определить пересечение множеств $X \cap Y$.

Решение:

Пересечение множеств $X \cap Y$ означает совокупность объектов с годовым оборотом b, удовлетворяющим неравенству $a \le b \le c$.

◆ Пример 1.5

Даны множества $A_1 = \{a, b, c\}$; $A_2 = \{c, d, e, f\}$; $U = \{a, b, c, d, e, f\}$. Осуществить над множествами операции: а) объединения; б) пересечения; в) разности; г) дополнения.

Решение:

а) объединение множеств A_1 и A_2 содержит все элементы, принадлежащие множествам A_1 и A_2:

$$A_1 \cup A_2 = \{a, b, c, d, e, f\};$$

б) пересечение множеств A_1 и A_2 содержит только элементы, принадлежащие и первому, и второму множествам:

$$A_1 \cap A_2 = \{c\};$$

в) используя определение разности множеств, получаем:

$$A_1 \setminus A_2 = \{a, b\}, A_2 \setminus A_1 = \{d, e, f\};$$

г) дополнение $\overline{A_1}$ содержит только те элементы множества U, которые не принадлежат A_1:

$$\overline{A_1} = U \setminus A_1 = \{d, e, f\},$$

Аналогично, $\overline{A_2} = U \setminus A_2 = \{a, b\}$.

◆ Пример 1.6

Пусть $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{2, 4\}$, $U = \{1, 2, 3, 4\}$.

Найти: а) $\overline{A} \cup \overline{B}$; б) $\overline{A \cap B}$; в) $A \cap \overline{B}$; г) $(B \setminus C) \cup A$.

Решение:

а) Найдем $\overline{A} \cup \overline{B}$.

$\overline{A}$ — это дополнение множества A до множества U, т.е., чтобы получить $\overline{A}$ из элементов множества $U = \{1, 2, 3, 4\}$, исключим элементы множества $A = \{1, 3\}$. Получаем:

$$\overline{A} = U \setminus A = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{1, 3\} = \{2, 4\}.$$

Аналогично вычислим дополнение множества B до универсального множества U. Оно содержит только те элементы, которые не принадлежат множеству B.

$$\overline{B} = U \setminus B = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{2, 3, 4\} = \{1\}.$$

Объединение $\overline{A} \cup \overline{B} = \{2, 4\} \cup \{1\} = \{1, 2, 4\}$;

б) определим $\overline{A \cap B}$.

Найдем множество $A \cap B$. Оно содержит только те элементы, которые принадлежат и множеству $A = \{1, 3\}$ и множеству $B = \{2, 3, 4\}$. Очевидно, что такой элемент только один. Получаем, что $A \cap B = \{3\}$.

Дополнение $\overline{A \cap B}$ содержит только те элементы универсального множества U, которые не принадлежат множеству $A \cap B$.

$$\overline{A \cap B} = U \setminus (A \cap B).$$

Окончательно получаем:

$$\overline{A \cap B} = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3\} = \{1, 2, 4\};$$

в) Найдем множество $A \cap \overline{B}$.

Последовательность определения $\overline{B} = \{1\}$ подробно рассмотрена в пункте «а».

$A \cap \overline{B}$ содержит только те элементы, которые принадлежат и множеству A, и множеству $\overline{B}$. Легко видеть, что такой элемент только один:

$$A \cap \overline{B} = \{1, 3\} \cap \{1\} = \{1\};$$

г) определим, что представляет собой множество $(B \setminus C) \cup A$. Разность множеств B и C — это множество, состоящее только из тех элементов множества B, которые не содержатся в множестве C: $B \setminus C = \{2, 3, 4\} \setminus \{2, 4\} = \{3\}$.

Объединяя полученное множество с множеством A, получаем: $(B \setminus C) \cup A = \{3\} \cup \{1, 3\} = \{1, 3\}$, так как один и тот же элемент не указывают несколько раз.

◆ Пример 1.7

Представить множество $A \cap (B \cup \overline{C})$ диаграммой Эйлера–Венна.

Решение:

Начнем с изображения универсального множества U в виде прямоугольника и множеств A, B и C в виде кругов в этом прямоугольнике. Круги, изображающие множества A, B и C, размещаем так, чтобы они имели общие области (рис. 1.6а).

Изобразим множество $B \cup \overline{C}$. Для этого заштрихуем множество B и всю область универсального множества за исключением круга, представляющего множество C. Линии штриховки в области множества B и множества $\overline{C}$ наносим под разными углами. Область на рисунке 1.6б, куда попала хотя бы одна из штриховок, представляет собой множество $B \cup \overline{C}$.

Изобразим на диаграмме рисунка 1.6в множество A штриховкой в одном направлении, а множество $B \cup \overline{C}$ — штриховкой в другом направлении. Искомое множество $A \cap (B \cup \overline{C})$ представлено площадью с двойной штриховкой. Выделим полученное решение жирной линией.

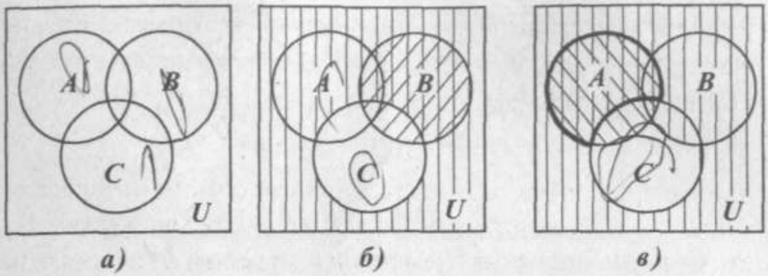


Рис. 1.6

◆ Пример 1.8

С помощью диаграммы Эйлера–Венна изобразить множество $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Решение:

Последовательность построения диаграммы представлена на рис. 1.7.

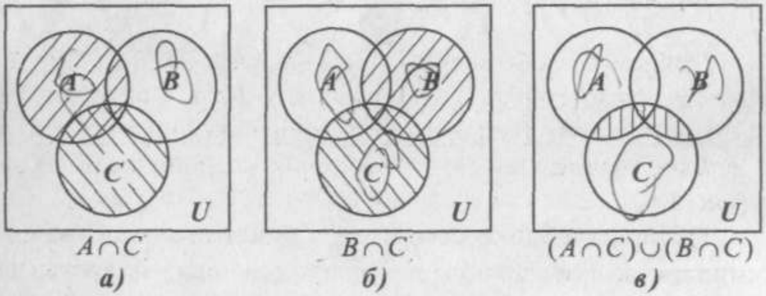


Рис. 1.7

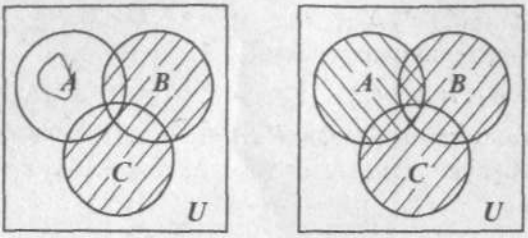
◆ Пример 1.9

С помощью диаграмм Эйлера–Венна и конкретных множеств доказать справедливость соотношения:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Решение:

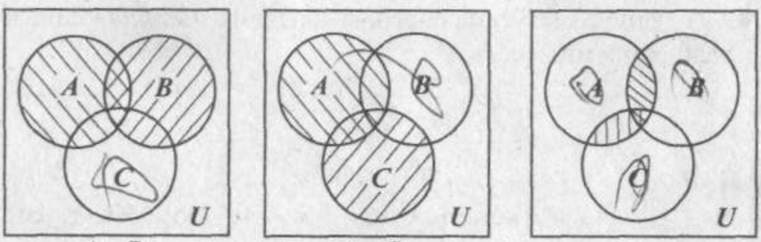
Левой части равенства соответствуют диаграммы, приведенные на рис. 1.8. Множество $A \cap (B \cup C)$ изображено двойной штриховкой на правой диаграмме (рис. 1.8б).



а) $B \cup C$ *б)* $A \cap (B \cup C)$

Рис. 1.8

Правая часть равенства приведена на рис. 1.9. Сравнение конечных диаграмм на рис. 1.8 и рис. 1.9 подтверждает справедливость доказываемого соотношения.



$A \cap B$ *а)* $A \cap C$ *б)* $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ *в)*

Рис. 1.9

Пусть $A = \{\square, *, \Delta\}$, $B = \{\square, \text{o}\}$, $C = \{\text{o}, *, \Delta, \#\}$.

Определим множество, соответствующее левой части равенства:

$B \cup C = \{\square, \text{o}\} \cup \{\text{o}, *, \Delta, \#\} = \{\square, \text{o}, *, \Delta, \#\}$.

Множество $A \cap (B \cup C)$ содержит элементы, принадлежащие множеству A и множеству $B \cup C$:

$$A \cap (B \cup C) = \{\square, *, \Delta\} \cap \{\square, \text{o}, *, \Delta, \#\} = \{\square, *, \Delta\}. \quad (1.1)$$

Для правой части равенства:

$A \cap B = \{\square, *, \Delta\} \cap \{\square, \text{o}\} = \{\square\}$,

$A \cap C = \{\square, *, \Delta\} \cap \{o, *, \Delta, \#\} = \{*, \Delta\}.$

Окончательно получаем:

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{\square\} \cup \{*, \Delta\} = \{\square, *, \Delta\}. \tag{1.2}$$

Таким образом, левая (1.1) и правая (1.2) части равенства соответствуют одному и тому же множеству, т.е. равенство доказано.

◆ Пример 1.10

Пусть универсальное множество U — множество всех учащихся и преподавателей некоторого техникума; A — множество всех преподавателей; B — множество учащихся, успевающих по всем дисциплинам на «отлично»; C — множество неуспевающих учащихся; D — множество учащихся в группе № 1. Каков содержательный смысл каждого из следующих множеств:

а) $\overline{A}$; б) $\overline{B}$; в) $B \cap D$; г) $D \backslash C$;
д) $A \cup \overline{C}$; е) $A \cup (B \cap D)$; ж) $C \backslash D$?

Решение:

а) $\overline{A}$ — множество всех учащихся техникума (без преподавателей);

б) $\overline{B}$ — множество преподавателей и учащихся, кроме успевающих по всем предметам на «отлично»;

в) $B \cap D$ — множество отличников, обучающихся в группе № 1;

г) $D \backslash C$ — множество учащихся группы № 1, справляющихся с учебным планом;

д) $A \cup \overline{C}$ — множество преподавателей и всех успевающих учащихся;

е) $A \cup (B \cap D)$ — множество преподавателей и отличников из группы № 1;

ж) $C \backslash D$ — множество неуспевающих учащихся всех групп, кроме первой.

◆ Пример 1.11

Проиллюстрировать на содержательном примере некоммутативность операции разности множеств: $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Решение:

Пусть $A = \{*, \bullet, \#, ?, \square, o\}$, $B = \{*, \Delta, \#, +\}$.

$A \setminus B = \{\bullet, ?, \square, o\}$, $B \setminus A = \{\Delta, +\}$.

Сравнение множеств $A \setminus B$ и $B \setminus A$ свидетельствуют о том, что они не равны и, следовательно, подтверждают некоммутативность операции разности множеств.

◆ Пример 1.12

Доказать на содержательном примере справедливость соотношения: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Решение:

Пусть $A = \{*, \bullet, \#\}$, $B = \{\square\}$, $C = \{o, +, \square, \#\}$.

$A \cup (B \cap C) = \{*, \bullet, \#, \square\}$ — множество, стоящее в левой части равенства.

$A \cup B = \{*, \bullet, \#, \square\}$, $A \cup C = \{*, \bullet, \#, o, +, \square\}$.

Множество, соответствующее правой части равенства:

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{*, \bullet, \#, \square\}$.

Множества левой и правой части совпали.

Свойства операций над множествами

1. Закон идемпотентности для объединения и пересечения множеств:

$$X \cup X = X, \; X \cap X = X.$$

2. Закон коммутативности:

$$X \cup Y = Y \cup X, \; X \cap Y = Y \cap X.$$

3. Закон ассоциативности:

$$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z, \; X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z.$$

4. Законы дистрибутивности:

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z),$$
$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$$

5. Законы поглощения:

$$X \cup (X \cap Y) = X, \;\; X \cap (X \cup Y) = X.$$

6. Законы, описывающие свойства пустого и универсального множеств по отношению к объединению и пересечению: $X \cup \varnothing = X, X \cap \varnothing = \varnothing, X \cup U = U, \; X \cap U = X.$

7. Законы дополнения: $X \cup \overline{X} = U, \; X \cap \overline{X} = \varnothing.$

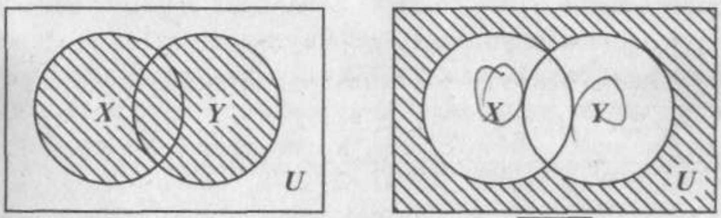
8. Закон инволютивности дополнения: $\overline{\overline{X}} = X.$

9. Закон Де Моргана: $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}, \; \overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}.$

Истинность каждого тождества проще всего проверяется построением диаграмм Эйлера-Венна отдельно для левой и правой частей, с последующим сравнением результатов. Большая часть из соотношений 1–9 является очевидной. Докажем с помощью диаграмм (рис. 1.10) справедливость первой части свойства 9:

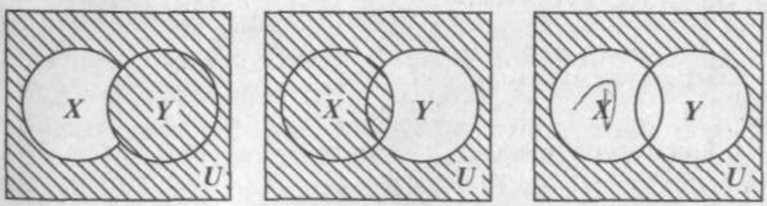
$$\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}.$$

Левая часть равенства:



$X \cup Y$ $\qquad$ $\overline{X \cup Y}$

Правая часть равенства:



$\overline{X}$ $\qquad$ $\overline{Y}$ $\qquad$ $\overline{X} \cap \overline{Y}$

Рис. 1.10

19

Совпадение конечных диаграмм для левой и правой частей доказывает рассмотренное тождество.

1.1.3. Отношения

Отношения — один из способов задания взаимосвязей между элементами множества. Наиболее изученными являются унарные и бинарные отношения.

Унарные (одноместные) отношения отражают наличие какого-то определенного свойства R у элемента множества M. Тогда все элементы a из множества M, которые обладают свойством R, образуют некоторое подмножество, называемое унарным отношением R. Например, множество M — это компания друзей: M = {Юрий, Инна, Игорь, Лена, Ирина}. Если свойство R «быть девушкой», то унарное отношение R = {Инна, Лена, Ирина}.

Бинарные (двухместные) отношения используются для определения взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов множества M. Тогда все пары (a, b) элементов множества M, между которыми существует отношение R, образуют подмножество из множества всех возможных пар элементов $M \times M = M^2$, называемое бинарным отношением R: $(a,b) \in R$; $R \subset M \times M$.

В общем случае рассматриваются n-местные отношения, например, тернарные отношения — отношения между тройками элементов.

Рассмотрим более подробно бинарные отношения. Если бинарное отношение R задается между парами элементов двух различных множеств M_1 и M_2, тогда отношение R образует множество пар $(a, b) \in R$ прямого произведения $M_1 \times M_2$.

Множество M_1 называется областью определения $D(R)$ отношения R: $D(R) = \{a |\ (a,b) \in R\}$.

Множество M_2 называется множеством значений $Q(R)$ отношения R: $Q(R) = \{b|\ (a,b) \in R\}$.

Бинарные отношения могут быть заданы любыми способами задания множеств. На конечных множествах бинарные отношения обычно задаются:

1. *Перечислением пар*, для которых это отношение выполняется. Например, для множества $M = \{1, 2, 3, 4\}$ бинарное отношение $R \subset M \times M$, если R означает «быть больше», имеет вид: $R = \{(a, b)|\, a,b \in M,\ a > b\}$.

$R = \{(4, 3), (4, 2), (4,1), (3,2), (3,1), (2,1)\}$ (в каждой паре первый элемент больше второго).

2. *Матрицей* — бинарному отношению $R \subset M \times M$, где $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ соответствует квадратная матрица порядка n, в которой элемент x_{ij}, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен 1, если между a_i и a_j существует бинарное отношение R, или 0, если такого отношения нет.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } a_i\ R\ a_j, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Составим, например, матрицу отношения $R \subset M \times M$, если $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и R означает «быть строго меньше».

Таким образом $R = \{(a, b)|\, a,b \in M,\ a < b\}$.

На пересечении первой строки и первого столбца ставим 0, так как $a_i = 1$, $a_j = 1$ и условие $a_i < a_j$ не выполняется. Элемент $x_{12} = 1$ (на пересечении 1-й строки и 2-го столбца), так как $a_i = 1$, $a_j = 2$ и неравенство $a_i < a_j$ оказалось верным. Элемент x_{13} также равен 1, поскольку для всей первой строки $a_i = 1$, а для третьего столбца $a_j = 3$ и условие бинарного отношения $a_i < a_j$ выполняется. Рассуждая аналогично, получаем матрицу бинарного отношения:

$a_i \backslash a_j$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1	1
3	0	0	0	1	1	1
4	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0

◆ Пример 1.13

Пусть $M = \{3, 4,5, 6, 7, 8, 9\}$. Записать бинарное отношение R перечислением и матрицей, если R означает «быть делителем».

Решение:

$R = \{(a, b) | a,b \in M,\ a$ — делитель $b\}$.

$R = \{(3, 3), (3, 6), (3, 9), (4, 4), (4, 8), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9)\}$.

В матрице бинарного отношения R на пересечении строки элемента a и столбца элемента b записываем 1, остальные пары элементов определяют нуль.

$a \backslash b$	3	4	5	6	7	8	9
3	1	0	0	1	0	0	1
4	0	1	0	0	0	1	0
5	0	0	1	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0	0
7	0	0	0	0	1	0	0
8	0	0	0	0	0	1	0
9	0	0	0	0	0	0	1

Свойства бинарных отношений

1. *Рефлексивность.* Бинарное отношение R рефлексивно, если для любого элемента $a \in M$ данное бинарное отношение выполняется, т.е. $a\ R\ a$. Отношение «жить в одном городе» рефлексивно.

Матрица рефлексивного бинарного отношения на главной диагонали содержит только единицы, так как отношение выполняется для всех пар (a, a), а им соответствуют элементы главной диагонали.

2. *Антирефлексивность.* Бинарное отношение R антирефлексивно, если для каждого элемента $a \in M$ не выполняется бинарное отношение $a\ R\ a$. Например, отношение «быть сыном» — антирефлексивно, так как ни для каких a не выполняется a — сын a. Из определеиия антирефлексивности бинарного отношения следует, что его матрица на главной диагонали содержит только нули.

3. *Симметричность.* Отношение R симметрично, еслн для любой пары $(a,b) \in M \times M$ бинарное отиошение выполняется в обе стороны: из $a\ R\ b$ следует $b\ R\ a$. Например, отношение «учиться в одном техникуме» симметрично. Пара элементов (Петров, Иванов) данного бинарного отношения озиачает «Петров учится в одном техникуме с Ивановым». Очевидно, что на паре (Иванов, Петров) отношение также выполняется: «Иванов учится в одном техникуме с Петровым». Учитывая, что отношение R для любой пары выполняется в обе стороны, либо не выполняется вообще $(x_{ij} = x_{ji})$, матрица симметричного отношения симметрична относительно главной диагонали.

4. *Антисимметричность.* Бинарное отношение R антисимметрично, если ни для каких различаюшихся элементов a и b $(a \neq b)$ не выполняется одновремеино $a\ R\ b$ и $b\ R\ a$. Например, отношение «быть начальником» антисимметрично. Пара (Рыжков, Зуев) означает «Рыжков — начальник Зуева». Наоборот, (Зуев, Рыжков) не является бинарным отношением «быть начальником». В матрице антисиммет-

ричного бинарного отношения отсутствуют единицы, симметричные относительно главной диагонали.

5. *Транзитивность*. Бинарное отношение R транзитивно, если для любых элементов a, b, с из того, что $a\,R\,b$ и $b\,R\,c$, следует $a\,R\,c$. Например, отношение «быть братом» транзитивно. Действительно, пара (Петр, Василий) — «Петр — брат Василия» и пара (Василий, Иван) — «Василий — брат Ивана» делают справедливым отношение (Петр, Иван) — «Петр — брат Ивана».

◆ Пример 1.14

Определить свойства бинарного отношения R «быть делителем», заданного на множестве натуральных чисел N.

Решение:

$R = \{(a, b) |\ a$ — делитель $b\}$

- отношение R — рефлексивно, так как любое число является делителем самого себя и пары (a, a) являются элементами отношения R;
- отношение R — антисимметрично, например 5 является делителем числа 25, но 25 не является делителем числа 5;
- отношение R — транзитивно, так как если b делится на a и c делится на b, то с делится на a. Например, $b = 12$, $a = 4$, $c = 24$. Если $12 : 4 = 3$ и $24 : 12 = 2$, то $24 : 4 = 6$.

◆ Пример 1.15

Определить свойства бинарного отношения R «быть братом», заданного на множестве людей.

Решение:

$$R = \{(a, b) |\ a \text{ — брат } b\}$$

- нерефлексивно, так как отношение $a\,R\,a$ не выполняется. На множестве людей отдельный индивидуум сам себе братом не является;
- антирефлексивно, так как отношение $a\,R\,a$ не выполняется ни для какого a, принадлежащего множеству людей;

- несимметрично, так как в общем случае наличие отношения $a\ R\ b$ не влечет $b\ R\ a$. Например, Петр — брат Анны не означает, что Анна — брат Петра;
- не антисимметрично, так как если $a\ R\ b$ и $b\ R\ a$, то отсюда не следует, что $a = b$. Если Иван — бран Василия и Василий — брат Петра, то это не означает, что Иван и Василий — один и тот же человек;
- транзитивно, так как если $a\ R\ b$ и $b\ R$ с, то, следовательно, $a\ R\ c$. Действительно, если Иван — брат Василия и Василий — брат Анны, то Иван — брат Анны.

Типы отношений

Отношением эквивалентности (эквивалентностью) называют бинарное отношение, если оно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Например, отношение «жить в одном городе», заданное на множестве людей, обладает всеми указанными выше свойствами и потому является эквивалентностью.

Эквивалентность R разбивает множество M, на котором оно задано, на непересекающиеся подмножества, причем для элементов одного и того же подмножества отношение R выполняется, а между элементами разных подмножеств заданное отношение отсутствует. В этом случае говорят, что отношение R задает *разбиение* на множестве M, или, другими словами, задает *систему классов эквивалентности*.

Отношением нестрогого порядка называют бинарное отношение, если оно обладает свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности.

Отношением строгого порядка называют бинарное отношение, если оно антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Например, отношение «быть не меньше», заданное на множестве натуральных чисел, является отношением нестрогого порядка, а отношение «быть больше» — отношением строгого порядка.

В результате задания отношения порядка на множестве M оно может быть:

1) *полностью упорядоченным*. Между двумя любыми элементами множества M можно задать отношение порядка. Например, на множестве людей между двумя любыми элементами можно задать отношение R «быть не старше». Следовательно, это бинарное отношение задает полный порядок на множестве людей;
2) *частично упорядоченным*, когда бинарное отношение не может быть задано между двумя любыми элементами множества, т.е. когда элементы множества не сравнимы по данному отношению. Например, отношение «быть начальником», заданное на множестве сотрудников одной организации, устанавливает частичный порядок, так как пара сотрудников, занимающих одинаковые должности, не могут быть сравнимы по данному отношению.

◆ Пример 1.16

Определить типы отношений:

1) на множестве формул отношение равносильности: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
2) на множестве программ $\{(a, b) \mid a$ и b вычисляют среднее значение случайной величины$\}$;
3) на множестве {а, б, в, г, д, е, ж, з} отношение предшествования букв в русском алфавите.

Решение:

Отношения, указанные в п. 1 и 2, являются отношениями эквивалентности, так как имеют все характерные свойства данного типа отношений. Отношение, заданное в п. 3, является отношением строгого порядка.

◆ Пример 1.17

Какой порядок на множестве задают следующие отношения:

1) $\le$ и $\ge$, а также $<$ и $>$ на множестве натуральных чисел;
2) подчиненности на предприятии?

Решение:

Отношения, указанные в п. 1, полностью упорядочивают множество натуральных чисел.

Отношение, указанное в п. 2, задает строгий частичный порядок, поскольку существуют пары элементов, между которыми нельзя установить указанное отношение: сотрудники, имеющие одинаковые должности.

◆ Пример 1.18

Проиллюстрировать диаграммой Венна следующие разбиения универсального множества:

1) $\{A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, \overline{A} \cap \overline{B}\}$;
2) $\{A \setminus B, A \cap B, B \setminus A\}$;
3) $\{A, \overline{A}\}$.

Решение:

Заданные разбиения представлены на рисунке 1.11.

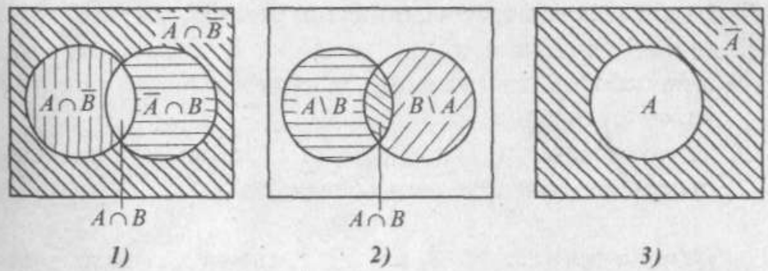


Рис. 1.11

1.2. Основные понятия теории графов

Графические представления — удобный способ иллюстрации различных понятий, отображения исследуемого процесса.

Все более распространенным становится представление количественных показателей в виде гистограмм, круговых и столбцовых диаграмм, по наглядным характеристикам которых (высота, ширина, площадь, радиус и др.) можно судить о количественных соотношениях сравниваемых объектов, значительно упрощая их анализ.

Мощным и наиболее исследованным классом объектов, относящихся к графическим представлениям, являются так называемые *графы*. В *теории графов* используется геометрический поход к изучению объектов. Основное понятие теории — *граф* — задается множеством вершин (точек) и множеством ребер (дуг), соединяющих некоторые пары вершин. Пример графа — схема метрополитена: множество станций (вершины графа) и соединяющие их линии (ребра графа).

Основоположником теории графов является Леонард Эйлер, опубликовавший в 1736 г. решение задачи о кенигсбергских мостах. В городе Кёнигсберге было два острова, соединенных семью мостами так, как показано на рисунке 1.12. Задача состояла в следующем: найти маршрут прохождения всех четырех частей суши (A, B, C, D), который бы начинался с любой из них, кончался на ней же и только один раз проходил по каждому мосту.

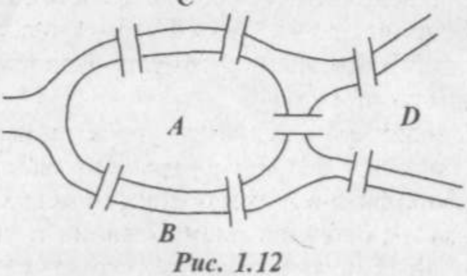


Рис. 1.12

Эйлер доказал, что задача не имеет решений. Для этого он обозначил каждую часть суши точкой (вершиной), а каждый мост — линией (ребром). Получился граф, представленный на рисунке 1.13. Утверждение о невозможности нахождения указанного маршрута эквивалентно утверждению о невозможности обойти граф указанным образом.

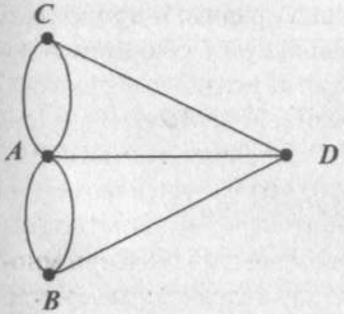


Рис. 1.13

Отправляясь от этого частного случая, Эйлер обобщил постановку задачи и нашел критерий обхода (специального маршрута): граф должен быть связанным, а каждая его вершина должна быть инцидентна четному числу ребер.

Существенный вклад в теорию графов внесли в первой половине XX в. немецкие ученые Кирхгоф и Келли. Изучение Кирхгофом электрических цепей привело к разработке основных понятий и получению ряда теорем, касающихся деревьев в графах. Келли подошел к исследованию деревьев, решая задачи исследования химических веществ с различными типами молекулярных соединений. Однако широкое распространение теория графов получила лишь с 50-х гг. в связи со становлением кибернетики и развитием вычислительной техники, когда теория графов существенно обогатилась новыми материалами и подходами. Тогда же началось системное изучение графов с различных точек зрения (структурная, информационная и др.). В это время формулировались проблематика и методы теории графов.

Графы находят применение при проектировании вычислительных машин, в теории программирования, в изучении химических, физических и технологических процессов, в решении задач сетевого планирования и управления, в проектировании организационных структур управления, в лингвистических и социологических исследованиях и т.д.

Теория графов тесно связана с топологией, теорией чисел, комбинаторикой, алгеброй и другими разделами математики.

Теория графов решает большое число разнообразных задач. Это задачи по анализу графов, определению характеристик их строения, подсчет графов или их частей, обладающих определенными свойствами, решение транспортных задач, связанных с перевозкой грузов по сети и др. Отдельный класс составляют задачи по синтезу графов с заданными свойствами.

1.2.1. Графы. Основные определения

Графом G называется совокупность двух множеств: *вершин* V и *ребер* E, между элементами которых определено отношение *инцидентности* — каждое ребро $e \in E$ инцидентно ровно двум вершинами u и v, которые оно соединяет. Вершины u и v называют смежными, а о вершине u и ребре e говорят, что они инцидентны, так же как и v и e.

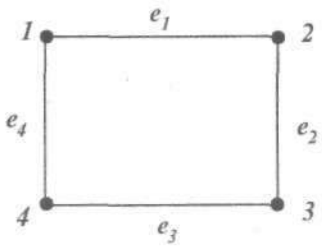


Рис. 1.14

Если два ребра инцидентны одной и той же вершине, то они называются смежными. На рисунке 1.14 вершины *1* и *2* — смежные, *1* и *3* — нет. Ребра e_1 и e_2 — смежные, а e_1 и e_3 — нет.

При изображении графа не все его детали одинаково важны. Несущественными являются геометрические свойства ребра (длина, кривизна и т.д.) и взаимное расположение вершин на плоскости. На рисунке 1.15 приведены одинаковые графы G_1 и G_2 ($G_1 = G_2$).

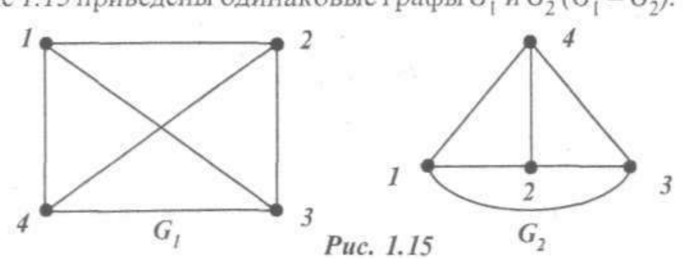


Рис. 1.15

Граф называется *правильным*, если его ребра не имеют общих точек, отличных от вершин графа. На рисунке 1.15 правильный граф G_2, граф G_1 — неправильный, так как ребра, соединяющие вершины 1, 3 и 2, 4 имеют общую точку, которая не является вершиной графа (точка пересечения диагоналей прямоугольника).

Для любого графа существует его правильная реализация в пространстве, но не любой граф можно правильно реализовать на плоскости. Правильно реализованные на плоскости графы называются *плоскими*. Граф G_2 на рис. 1.15 является плоским. Примером неплоского графа может служить граф $G_1 + G_2$ на рис. 1.35.

Чтобы реализовать неплоские графы в пространстве в микроэлектронике пришлось создать технологию многослойных печатных плат.

Ребра, соединяющие вершины сами с собой, называются *петлями*. На рисунке 1.16б петли обозначены e_1, e_2, e_3.

Ребра, инцидентные одной и той же паре вершин, называются *параллельными*, или *кратными* (m, p на рис. 1.16а и x, y, z — параллельны).

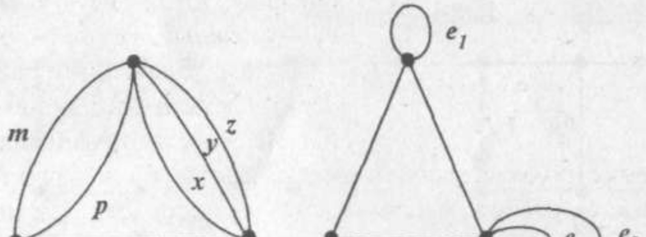


Рис. 1.16

Ребро, соединяющее две вершины, может иметь направление от одной вершины к другой, оно называется *направленным*, или *ориентированным*. На рисунке 1.17 представлены примеры графов с тремя вершинами и тремя дугами.

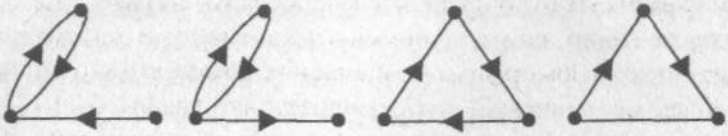


Рис. 1.17

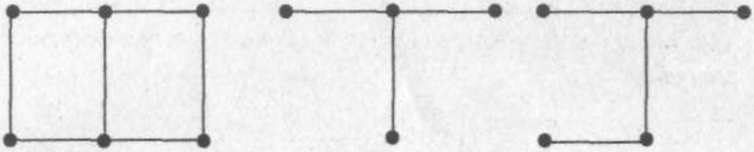
Граф, соединяющий ненаправленные ребра, называется *неориентированным* (рис. 1.13–1.16).

Граф называется *конечным*, если множество его элементов (вершин и ребер) конечно, и *пустым*, если множество его вершин, а значит, и ребер пусто.

Граф называется *полным*, если каждая пара вершин соединена ребром и граф не содержит петель и кратных ребер.

Дополнением графа G называется граф $\overline{G}$, имеющий те же вершины, что и граф G, и содержащий только те ребра, которые надо добавить к графу G, чтобы получить полный граф.

Подграфом графа G называется граф, у которого все вершины и ребра принадлежат G. На рисунке 1.18а изображен граф, а на рис. 1.18б — два его подграфа.

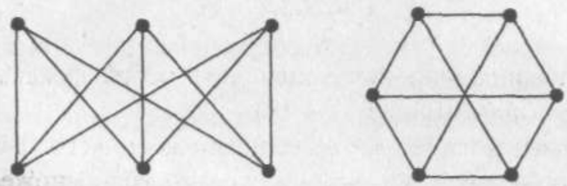


а) *б)*

Рис. 1.18

Графы G_1 и G_2 называются равными ($G_1 = G_2$), если множества их вершин и ребер (выраженных через пары инцидентных им вершин) совпадают: $V_1 = V_2$ и $E_1 = E_2$ (рис. 1.15).

Граф G является полностью заданным, если нумерация его вершин и ребер зафиксирована. Графы, отличающиеся только нумерацией вершин, называются *изоморфными*. Изоморфизм есть отношение эквивалентности на графах, т.е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. В математике понятие «изоморфизм» означает похожесть однотипных объектов. Запись $G_1 \simeq G_2$ означает, что графы G_1 и G_2 — изоморфны. Изоморфные графы изображены на рис. 1.19.



$G_1 \simeq G_2$

Рис. 1.19

Локальной степенью $\rho(V)$ (или просто степенью) вершины графа G называют количество ребер, инцидентных вершине V.

Поскольку каждое ребро инцидентно двум вершинам, в сумму степеней вершин графа каждое ребро вносит двойку. Таким образом, мы приходим к утверждению, которое установлено Эйлером и является исторически первой теоремой теории графов.

Сумма степеней вершин графа G равна удвоенному числу его ребер:

$$\sum_{V \in G} \rho(V) = 2q.$$

В любом графе число вершин с нечетными степенями четно (см. пример 1.20).

Для вершин орграфа (графа с ориентированными ребрами) определяются две локальные степени:

1) $\rho_1(V)$ — число ребер с началом в вершине V, или количество выходящих из вершины V ребер;
2) $\rho_2(V)$ — количество входящих в V ребер, для которых эта вершина является концом.

Петля дает вклад 1 в обе эти степени.

В орграфе суммы степеней всех вершин $\rho_1(V)$ и $\rho_2(V)$ равны количеству ребер m этого графа, а значит и равны между собой (см. пример 1.20):

$$\sum_V \rho_1(V) = \sum_V \rho_2(V) = m.$$

Вершина графа называется *изолированной*, если ее локальная степень равна нулю: $\rho(V) = 0$.

Концевой называют вершину, локальная степень которой равна 1: $\rho(V) = 1$.

Графы, у которых все вершины имеют одинаковую степень, называются *регулярными*, или *однородными*.

◆ Пример 1.19

Задать граф, представленный на рисунке 1.20, через множество вершин V и ребер E.

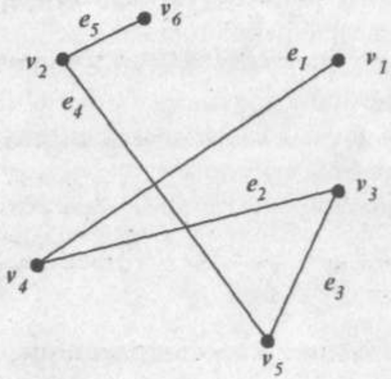


Рис. 1.20

Решение:

Множество поименованных вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.

Множество поименованных ребер $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

Для задания графа требуется установить отношение инцидентности ребер соответствующим вершинам.

Множество ребер, каждое из которых представлено парой своих концевых вершин:

$$E = \{(v_1, v_4), (v_4, v_3), (v_3, v_5), (v_5, v_2), (v_2, v_6)\}.$$

Порядок указания вершин при описании ребра здесь безразличен, так как все ребра в графе G неориентированы.

◆ Пример 1.20

Определить степени вершин графов, изображенных на рис. 1.21.

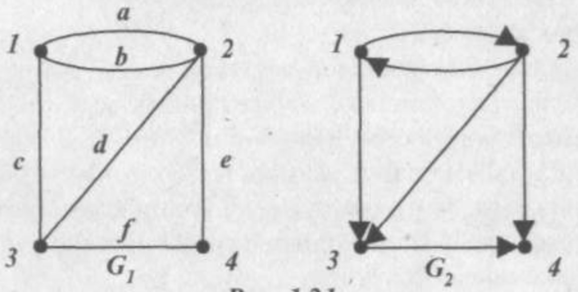


Рис. 1.21

Решение:

Степени вершин неориентированного графа G_1:

$$\rho(1) = 3, \rho(2) = 4, \rho(3) = 3, \rho(4) = 2.$$

Сумма степеней всех вершин графа G_1 равна 12, т.е. вдвое больше числа ребер.

Степени вершин ориентированного графа G_2:

ρ_1 определяет количество выходящих ребер,

$$\rho_1(1) = 2, \rho_1(2) = 3, \rho_1(3) = 1, \rho_1(4) = 0.$$

ρ_2 определяет количество входящих в вершину ребер,

$$\rho_2(1) = 1, \rho_2(2) = 1, \rho_2(3) = 2, \rho_2(4) = 2.$$

Суммы степеней вершин первого и второго типа ориентированного графа G_2 совпадают и равны числу ребер графа:

$$\sum_V \rho_1(V) = \sum_V \rho_2(V) = 6 = m.$$

1.2.2. Маршруты цепи, циклы

Рассмотрим неориентированный граф G.

Маршрутом в графе G называется чередующаяся последовательность вершин и ребер, в которой каждые два соседних ребра e_n и e_{n+1} имеют общую вершину. В маршруте одно и то же ребро может встречаться несколько раз. *Начало маршрута* — вершина v_1, инцидентная ребру e_1 и не инцидентная ребру e_2. Вершину v_n, инцидентную ребру e_n и не инцидентную ребру e_{n+1}, называют *концом маршрута*. Маршрут называется *замкнутым*, если $v_1 = v_n$, и *открытым* в противном случае.

Маршрут называется *цепью*, если все его ребра различны. Цепь, содержащая только различные вершины и ребра и непересекающая себя, называется *простой цепью*.

Замкнутый маршрут называется *циклом*, если он является цепью, и *простым циклом*, если это простая цепь.

На рисунке 1.22 представлен граф G, иллюстрирующий описанные выше понятия.

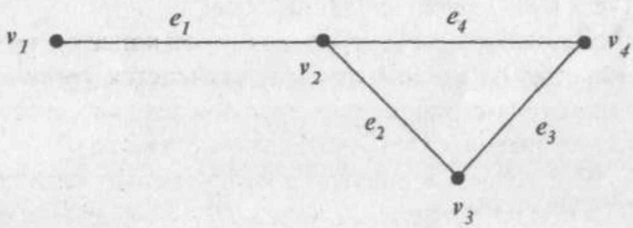


Рис. 1.22

На графе G маршрут $v_1\ v_2\ v_3\ v_2\ v_4$ не является цепью, так как дважды содержит ребро e_2.

Маршрут $v_1\ v_2\ v_3\ v_4$ является примером простой цепи, а $v_2\ v_3\ v_4\ v_2$ — простой цикл.

Две вершины v_k и v_n называются связными, если существует маршрут с началом в вершине v_k и концом в вершине v_n. Между связанными вершинами всегда существует простая цепь. Граф G называется *связным*, если любая пара его вершин соединена простой цепью. Максимальный связный подграф графа G называется *компонентом* графа G. Итак, несвязный граф имеет как минимум два компонента.

Граф на рис. 1.23 имеет 7 компонент.

В связном графе все подграфы связны, следовательно, неориентированный граф распадается единственным образом в сумму своих связных графов.

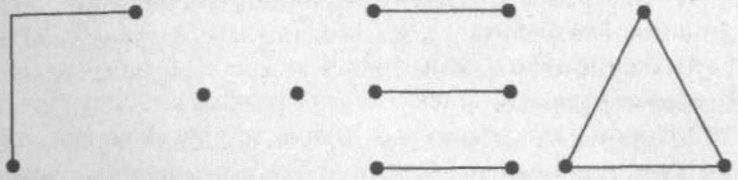


Рис. 1.23

Длина маршрута $v_1 \ldots v_n$ равна количеству ребер в маршруте, причем каждое ребро считается столько раз, сколько раз оно встречается в данном маршруте.

Пусть G_1 — ориентированный граф.

Последовательность ребер, в которой конец одного ребра совпадает с началом другого, называется *путем*. Соблюдение ориентации ребер в пути обязательно, а вот одно и то же ребро может встречаться несколько раз.

Путь называется ориентированной цепью, если каждое ребро в нем встречается один раз. *Простой цепью* в ориентированном графе называют путь, в котором любая вершина инцидентна не более чем двум ребрам.

Замкнутый путь называется *контуром*. Если контур является простой цепью, то его называют *простым циклом*, если обычной цепью, то — *циклом*. Всякий граф, содержащий циклы, содержит и простые циклы.

Орграф называется *связным*, если он связен без учета ориентации его ребер, и *сильно связным*, если из любой вершины v существует путь в любую другую вершину u с учетом ориентации ребер.

Расстоянием $d(u, v)$ между двумя вершинами u и v графа G называется длина кратчайшей постой цепи, соединяющей эти вершины. Если u и v не соединены, то расстояние между ними равно бесконечности $d(u, v) = \infty$.

В связном графе расстояние удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $d(u, v) \geq 0$;

2) $d(u, v) = 0$, тогда и только тогда, когда $u = v$;

3) $d(u, v) = d(v, u)$;

4) $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$.

Центром ориентированного графа называется вершина, от которой наибольшее расстояние до других вершин является минимальным. Максимальное расстояние от центра графа до его вершин называется *радиусом графа* $r(G)$.

Цепь, которая включает все ребра графа, но имеет различные начало и конец, называется *эйлеровой*.

Цикл, содержащий все ребра графа, называется *Эйлеровым*. Эйлеров граф содержит эйлеров цикл.

Теорема Эйлера: *неориентированный конечный граф G является эйлеровым, если он связен и все его вершины имеют четные степени.*

Гамильтонов цикл — простой цикл, проходящий через все вершины графа. *Гамильтонова цепь* — это простая цепь с началом и концом в разных вершинах, соединяющая все вершины графа.

Обхват графа G — это длина кратчайшего простого цикла, обозначается $g(G)$.

Окружение графа — обозначается $c(G)$ — длина самого длинного простого цикла. Если граф G не содержит циклов, то понятия обхвата и окружения для него не определены.

◆ Пример 1.21

В графе G, изображенном на рисунке 1.24, указать примеры маршрута, цепи, простой цепи, замкнутого маршрута, цикла, простого цикла.

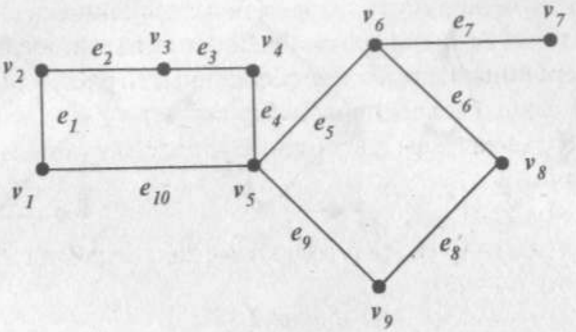


Рис. 1.24

Решение:

1. Пример маршрута, соединяющего вершины v_1 и v_9, не являющегося цепью: $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, e_9, e_5, e_6, e_8)$ или $(e_{10}, e_9, e_8, e_6, e_5, e_9)$ и другие.

2. Пример цепи, которая не является простой цепью, соединяющей вершины v_6 и v_9: $(e_5, e_4, e_3, e_2, e_1, e_{10}, e_9)$.

3. Пример простой цепи, соединяющей вершины v_6 и v_9: (e_6, e_8) или (e_5, e_9).

4. Замкнутый маршрут, не являющийся циклом: $(e_{10}, e_5, e_6, e_8, e_9, e_5, e_6, e_8, e_9, e_{10})$.

5. Цикл, не являющийся простым циклом: $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, e_9, e_{10})$.

6. Простой цикл: $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_{10})$ или (e_5, e_6, e_8, e_9).

При описании цикла любая вершина может быть выбрана в качестве начала, поэтому простой цикл (e_5, e_6, e_8, e_9) можно записать (e_6, e_8, e_9, e_5), или (e_8, e_9, e_5, e_6) и (e_9, e_5, e_6, e_8).

◆ Пример 1.22

Какие из графов G_1, G_2, G_3 (рис. 1.25) являются связными, сильно связными? Ответ обосновать.

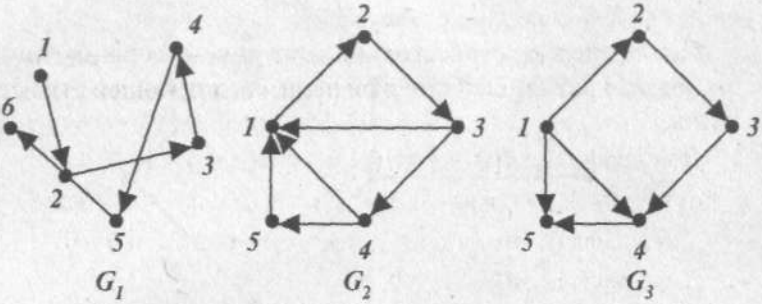


Рис. 1.25

Решение:

Граф G_1 является связным, так как любая пара его вершин соединена простой цепью, а вот сильно связным он не является, так как, например, вершина 1 недостижима из других вершин с учетом ориентации ребер.

Граф G_2 связен и сильно связен, поскольку любая из его вершин достижима из другой вершины при движении в указанном направлении.

Граф G_3 связен, но не сильно связен, так как, например, из вершины 4 невозможно по указанной ориентации попасть в вершины 1, 2, 3, а из вершины 5 невозможно попасть ни в какую другую вершину.

◆ Пример 1.23

Для графов, изображенных на рис. 1.26, определить расстояние между вершинами.

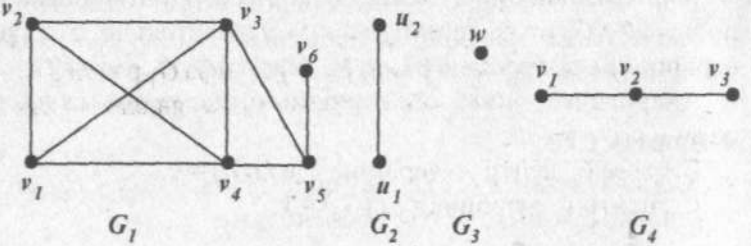


Рис.1.26

Решение:

По определению, расстояние между двумя вершинами — это длина кратчайшей простой цепи, соединяющей эти вершины.

Для графа G_1: $d(v_1,v_2)=d(v_1, v_4)=d(v_1,v_3)=1$,
$d(v_1,v_5)=2$, $d(v_1,v_6)=3$, $d(v_1,v_5)=2$, $d(v_2,v_6)=3$ и т.д.

Для графа G_2: $d(u_1, u_2)=1$, $d(u_1, u_1)=0$, $d(u_2, u_2)=0$.

Для графа G_3: $d(w, w)=0$.

Для графа G_4: $d(v_1, v_2)=1$, $d(v_1,v_3)=2$, $d(v_2,v_3)=1$,
$d(v_1,v_1)=0$ и т.д.

◆ Пример 1.24

Определите центры и радиусы графов, изображенных на рисунке 1.26.

Решение:

Определим максимальное расстояние от каждой вершины графа:

G_1: $r(v_1)=3$, так как наиболее длинная минимальная простая цепь (v_1,v_3, v_5,v_6) содержит 3 ребра. $r(v_2) = 3$ [простая цепь — (v_2,v_3, v_5,v_6)], $r(v_3) = 2$, $r(v_4) = 2$, $r(v_5) = 2$, $r(v_6) = 3$.

G_2: $r(u_1)=1$, $r(u_2)=1$.

G_3: $r(w)=0$.

G_4: $r(v_1)=2$ [простая цепь — (v_1,v_2, v_3)], $r(v_2)=1$, $r(v_3)=2$ [простая цепь — (v_3,v_2, v_1)].

Максимальное расстояние до других вершин минимально в графе G_1 от вершин v_3, v_4, v_5. Следовательно, эти три вершины являются центрами. Радиус графа G_1 равен 2.

Аналогично, для G_2 обе вершины u_1 и u_2 являются центрами и $r(G_2)=1$.

В графе G_3 центр — вершина w и $r(G_3)=0$.

G_4: центр — вершина v_2, $r(G_4)=1$.

◆ Пример 1.25

Имеет ли пятиугольник, с центрами в некоторых вершинах, эйлерову цепь или эйлеров цикл (рис. 1.27)?

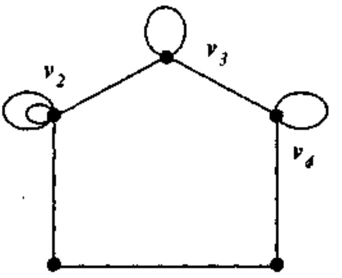


Рис. 1.27

Решение:

Любая вершина пятиугольника, не содержащая петель, имеет степень 2. Каждая петля дает вклад в степень вершины, равный 2. Таким образом все вершины изображенного пятиугольника имеют четные степени: $\rho(v_1) = 2$, $\rho(v_2) = 6$, $\rho(v_3) = 4$, $\rho(v_4) = 4$, $\rho(v_5) = 2$.

В соответствии с теоремой Эйлера заданный граф является эйлеровым и, следовательно, содержит эйлеров цикл.

Чтобы в конечном неориентированном графе существовала эйлерова цепь (цепь, проходящая через все ребра с разными началом и концом), необходимо и достаточно, чтобы начальная и конечная вершины имели нечетную степень, а все остальные вершины — четную. Это условие в заданном пятиугольнике не выполняется, следовательно, он не содержит эйлерову цепь.

◆ Пример 1.26

Определите наличие гамильтоновых циклов и цепей в графах, изображенных на рис 1.28.

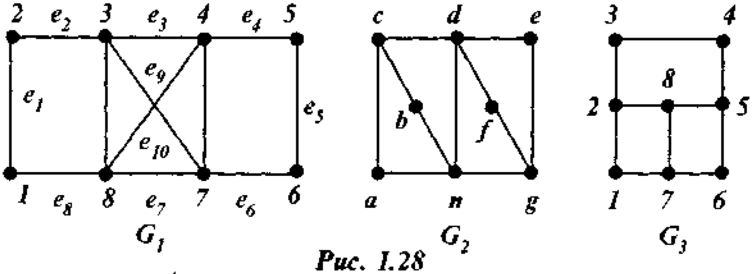


Рис. 1.28

Решение:

Простой цикл, проходящий через все вершины графа (гамильтонов цикл), существует в графе G_1. Он проходит через все вершины графа по ребрам ($e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8$), соединяющим все вершины графа. В графе G_1 существуют и гамильтоновы цепи, которые получаются из гамильтонова цикла удалением любого ребра.

В графе G_2 нет гамильтонова цикла, так как при обходе внешнего прямоугольника (a, c, e, g) цикл должен содержать все ребра, лежащие на сторонах прямоугольника, но тогда он не проходит через вершины b и f. Не существует в графе G_2 и гамильтоновой цепи.

В графе G_3 нет гамильтонова цикла, но есть гамильтонова цепь. Например, цепь, содержащая ребра, соединяющие вершины 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

1.2.3. Деревья

Существует один простой, но важный тип графов, который называется деревом. Деревья находят приложения в различных областях знаний и, кроме того, в силу предельной простоты строения, являются модельными объектами при решении различных задач теории графов.

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов, а значит петель и кратных ребер. Связность графа означает, что при удалении хотя бы одного ребра, он теряет связность (рис. 1.29).

В дереве число вершин и число ребер жестко связаны: если вершин n, то ребер — на единицу меньше ($n - 1$).

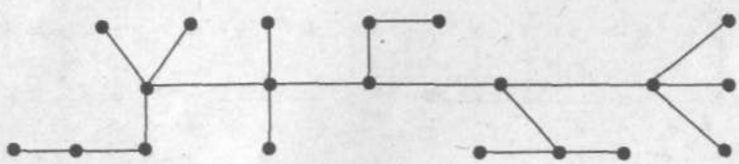


Рис. 1.29

Вершина V графа G называется концевой, если ее степень $\rho(V) = 1$. Ребро, инцидентное концевой вершине, называется концевым.

Для того чтобы ориентировать дерево, выбирается вершина V_0, которую называют *корнем дерева*, и все ребра такого *дерева с корнем* ориентируются от этой вершины.

Пусть дано конечное дерево G. *Вершинами типа 1* называются его концевые вершины.

Если у дерева G удалить все вершины типа 1 и инцидентные им ребра, то в оставшемся дереве G' концевые вершины называются *вершинами типа 2* в дереве G.

Аналогично определяются вершины типов 3, 4, 5 и т.д.

Цикломатическим числом конечного неориентированного графа называется:

$$V(G) = V_c + V_E - V_V,$$

где V_c — число связных компонент графа;

V_E — число ребер графа;

V_V — число вершин.

◆ Пример 1.27

Дано дерево G (рис. 1.29). Определить число вершины максимального типа, цикломатическое число графа. Построить ориентированное дерево с корнем V_0, являющимся вершиной максимального типа.

Решение:

Пользуясь определением, обозначим концевые вершины дерева G типом 1. Отсекая их и инцидентные им ребра, найдем вершины типа 2 (рис. 1.30). Оставшееся дерево назовем G_1.

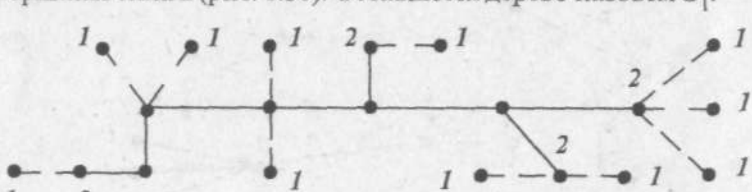


Рис. 1.30

Из полученного дерева G_1 удалим вершины типа 2 и инцидентные им ребра, обозначим вершины типа 3 (рис. 1.31).

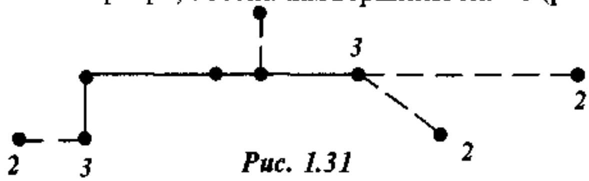


Рис. 1.31

Аналогичными действиями определим тип остальных вершин. Окончательный результат представлен на рис. 1.32.

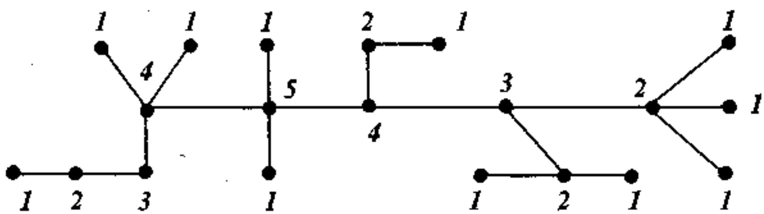


Рис. 1.32

Итак, максимальный тип вершины 5 и такая вершина одна.

Для расчета цикломатического числа определим число связных компонент: $V_c = 1$ (для любого дерева, согласно определению $V_c = 1$). Число вершин $V_V = 20$, число ребер $V_E = 19$.

$$V(G) = 1 + 19 - 20 = 0.$$

Учитывая, что в любом дереве, число ребер на единицу меньше числа вершин, получим одинаковое, равное нулю, цикломатическое число для любого дерева. Ориентированное дерево с корнем в вершине типа 5 представлено на рис 1.33.

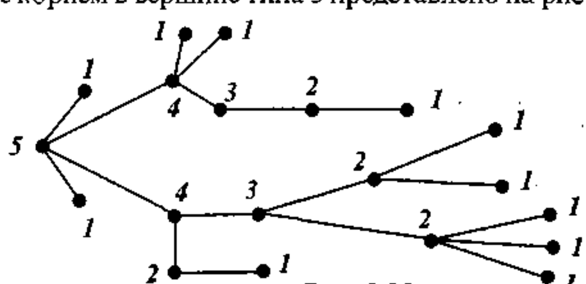


Рис. 1.33

1.2.4. Графы и бинарные отношения

Отношению R, заданному на множестве V, взаимно однозначно соответствуют ориентированный граф G без кратных ребер с множеством вершин V, в котором ребро (v_1, v_2) существует, если только выполнено $v_1 R v_2$.

Пусть бинарное отношение R определено на миожестве $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Симметричному отношению R взаимно однозначно соответствует неориентированный граф без кратных ребер, в котором ребро (v_1, v_2) существует только тогда, когда выполняется $v_1 R v_2$ и $v_2 R v_1$.

Антисимметричному отношению R взаимно однозначно соответствует ориентированный граф без кратных ребер, не содержащий пар вершин с ребрами, противоположно направленными к разным вершинам.

Рефлексивному отношению R соответствует граф без кратных ребер, имеющий петли во всех вершинах.

Антирефлексивному отношению R соответствует граф без кратных ребер и без петель.

Транзитивному отношению R соответствует граф без кратных ребер. Для каждой пары ребер (v_1, v_2) и (v_2, v_3) имеется замыкающее ребро (v_1, v_3).

1.2.5. Операции над графами

В ряде случаев удобно представить структуру рассматриваемого графа с помощью графов меньшего размера и более простой структуры.

Пусть графы G_1 и G_2 имеют непересекающиеся множества вершин V_1 и V_2 и непересекающиеся множества ребер E_1 и E_2.

Объединением графов $G_1 \cup G_2$ называют граф, множеством вершин которого являются $V = V_1 \cup V_2$, а множеством ребер — $E = E_1 \cup E_2$ (рис. 1.34).

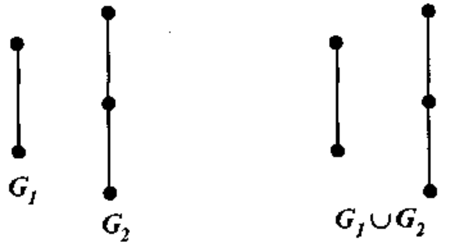


Рис. 1.34

Соединение графов $G_1 + G_2$ состоит из $G_1 \cup G_2$ и всех ребер, соединяющих V_1 и V_2 (рис. 1.35).

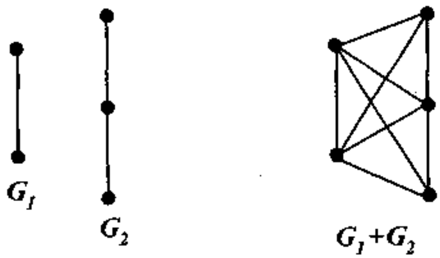


Рис. 1.35

Произведением графов $G_1 \times G_2$ называется граф, вершины которого $u = (u_1, u_2)$ и $v = (v_1, u_2)$ смежны тогда и только тогда, когда [$u_1 = v_1$ и u_2, v_2 — смежные вершины] или [$u_2 = v_2$ и u_1, v_1 — смежные вершины] (рис. 1.36).

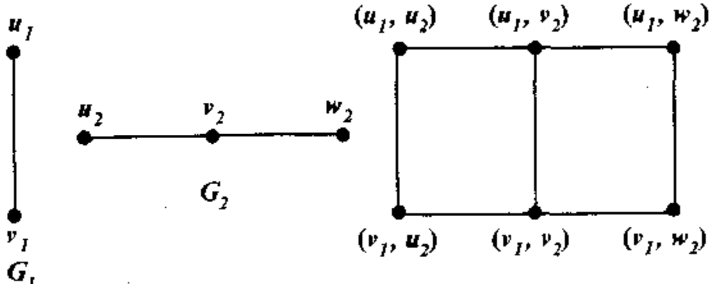


Рис. 1.36

Композицией $G = G_1[G_2]$ называют такой граф G, вершина которого $u = (u_1, u_2)$ смежна с $v = (v_1, v_2)$ тогда и только тогда, когда [u_1, v_1 — смежные вершины] или [$u_1 = v_1$ и u_2, v_2 — смежные вершины].

Композиции графов G_1 и G_2 представлены на рис. 1.37.

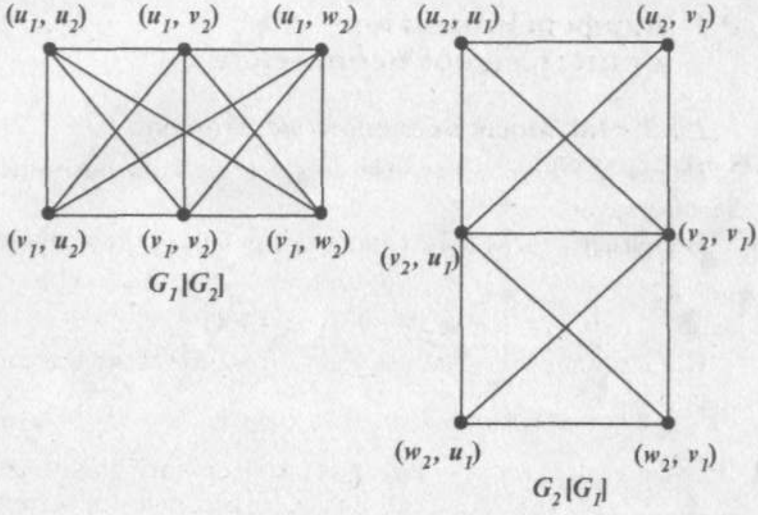


Рис. 1.37

Глава 2

Математический анализ

2.1. Дифференциальное и интегральное исчисления

2.1.1. Числовые последовательности

Числовые последовательности — это бесконечные множества чисел.

Например, последовательность приближенных значений $\sqrt{2}$:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 1{,}4; \quad x_3 = 1{,}41 \ldots$$

Числовая последовательность — это множество вещественных чнсел

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \qquad (2.1)$$

в случае, если каждому числу n из натурального ряда чисел $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ $(n \in N)$ поставлено в соответствие вещественное число x_n.

Элементы (члены) последовательности — это числа x_1, x_2, $x_3, \ldots$, $x_n, \ldots$

Общий элемент последовательности обозначается символом x_n, где число n — его *номер*.

Символ $\{x_n\}$ — это сокращенное обозначение последовательности (2.1).

Например, $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ — это последовательность чисел

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Последовательиость считается *заданной*, если указан способ получения любого ее элемента.

Например, общий элемент x_n задан формулой:

$$x_n = -1 \mp (-1)^n.$$

Это значит, задана последовательность 0, -2, 0, -2, …

Геометрически последовательность изображается в виде последовательности точек на числовой оси. Координаты этих точек равны соответствующим членам последовательности.

Например, на рис. 2.1 на числовой оси представлена последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

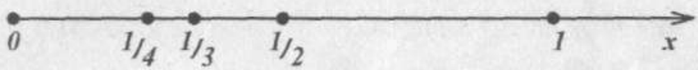


Рис. 2.1. *Геометрическое изображение последовательности* $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

- Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \qquad (2.2)$$

Сходящаяся последовательность — это последовательность, у которой существует предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Расходящаяся последовательность — это последовательность, не имеющая предела, а также имеющая своим пределом $+\infty$ или $-\infty$.

- ε — *окрестность точки а* — это множество точек числовой прямой, если $|x_n - a| < \varepsilon$ (рис. 2.2).

Это означает, что при $n > N$ все элементы последовательности $\{x_n\}$ находятся в ε — *окрестности точки а.*

Предел последовательности a часто называют *точкой сгущения.* Это следует из геометрической интерпретации: если последовательность, представляющая собой бесконечное

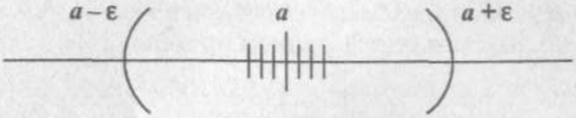


Рис. 2.2. Геометрическое представление предела последовательности

множество чисел, сходится, то в любой ε — окрестности точки a на числовой прямой находится бесконечное число ее точек — элементов этой последовательности, тогда как вне ε — окрестности остается конечное число элементов.

- Числовая последовательность может иметь *только один предел.*
- Последовательность (2.1) называется *ограниченной,* если существует постоянная M такая, что

$$|x_n| \le M \text{ для всех } n \in N.$$

- Если последовательность имеет предел, то она *ограничена.*
- Неограниченная последовательность не имеет *конечного предела.* Однако она может иметь *бесконечный предел*:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

- Если $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ — *бесконечно большая последовательность*, имеющая бесконечный предел, и наоборот.

◆ **Пример 2.1**

Рассмотрим сходящуюся последовательность $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$.

Доказать, что предел этой последовательности равен 1:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Решение:

Воспользуемся определением предела (2.2):

$$|x_n - a| < \varepsilon .$$

Возьмем любое положительное число $\varepsilon > 0$.

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} .$$

Следовательно, $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Решая это неравенство, получаем $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.

Если примем N, равным целой части числа $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$:

$$N = \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right],$$

то неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ будет выполняться при всех $n > N$.

◆ Пример 2.2

Показать, что последовательность $\{x_n\} = (-1)^n$ является расходящейся, т.е. не имеет предела.

Решение:

$\{x_n\} = (-1)^n$ — это последовательность $-1, 1, -1, 1, \ldots$, какое бы число мы ни предположили в качестве предела: 1 или -1, при $\varepsilon < 0{,}5$. Определение предела $|x_n - a| < \varepsilon$ не удовлетворяется: вне ε — окрестности этих чисел остается бесконечное число элементов $\{x_n\}$, так как все элементы с нечетными номерами равны -1, а с четными номерами равны 1.

Свойства сходящихся последовательностей
(сформулированы в виде теорем)

Пусть заданы две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Пусть предел $\{x_n\}$ равен a: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, а предел $\{y_n\}$ равен b:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b\,.$$

1. *Сумма двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность вида $\{x_n + y_n\}$, предел которой равен сумме пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$:*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b.$$

2. *Произведение сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность вида $\{x_n \cdot y_n\}$, предел которой равен произведению пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$:*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = ab.$$

3. *Частное двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, при условии, что предел последовательности $\{y_n\}$ отличен от нуля, есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}\,,$$

если $y_n \neq 0$ для всех $n \in N$ и $b \neq 0$.

4. *Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяют неравенству $x_n \geq b$, начиная с некоторого номера, то и предел a этой последовательности удовлетворяет неравенству $a \geq b$.*
5. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела:*

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = ca.$$

6. Если заданы три последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *и* $\{z_n\}$ *и предел* $\{z_n\}$ *равен* c, *то если* $x_n < y_n < z_n$, $a = c$, *то* $b = c$.
7. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность или на число есть бесконечно малая последовательность.*

8. *Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

9. ***Число e*** *определяется как предел последовательности* x_1, $x_2, \ldots, x_n, \ldots$, *общий член которой выражается формулой:*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Эта последовательность монотонно возрастает и имеет предел:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Этот предел называют числом e.

$e = 2{,}7182818\ldots$ — иррациональное число.

Это число играет большую роль в математике.

Натуральный логарифм $\ln a$ — это логарифм по основанию e:

$$\ln a = \log_e a.$$

◆ Пример 2.3

Предел последовательности $\lim\limits_{n \to \infty} (2 + 0{,}3^n)$ равен …

Варианты ответов:

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) ∞.

Решение:

Используя свойство последовательности, получим:

$$\lim_{n \to \infty} (2 + 0{,}3^n) = \lim_{n \to \infty} 2 + \lim_{n \to \infty} 0{,}3^n.$$

$\lim\limits_{n \to \infty} 2 = 2$, так как все члены последовательности 2.

$\lim\limits_{n \to \infty} 0{,}3^n = 0$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$.

$x_n = 0{,}3^n$. Так как $|x_n - 0| = 0{,}3^n$, то неравенство $|x_n - 0| < \varepsilon$ будет выполняться, если $0{,}3^n < \varepsilon$. Возьмем $n_\varepsilon > \log_{0{,}3} \varepsilon$.

Учитывая, что показательная функция $0{,}3^n$ — убывающая, получим:

$$|x_n - 0| = 0{,}3^n < 0{,}3^{n_\varepsilon} < 0{,}3^{\log_{0,3}\varepsilon}.$$

По определению логарифма, $0{,}3^{\log_{0,3}\varepsilon} = \varepsilon$. Следовательно, $|x_n - 0| < \varepsilon$ для всех $n > n_\varepsilon$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}3^n = 0$.

◆ Пример 2.4

Предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3n+4}$ равен …

Варианты ответов:

1) 0; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) $\dfrac{1}{3}$; 4) $\dfrac{1}{4}$.

Решение:

В этом примере имеет место неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ (бесконечность на бесконечность). Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, разделив числитель и знаменатель на n, а затем, применив свойство, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\dfrac{4}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n}} = \frac{1}{3 + 4\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}} =$$

$$= \frac{1}{3+4\cdot 0} = \frac{1}{3}.$$

◆ Пример 2.5

Предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3 - n + 1}{3n^3 + 4n^2 - 2}$ равен …

Варианты ответов:

1) 0; 2) $\dfrac{1}{3}$; 3) $\dfrac{2}{3}$; 4) ∞.

Решение:

Это неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на n^3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{3+\dfrac{4}{n}-\dfrac{2}{n^3}}=\frac{2}{3}.$$

◆ Пример 2.6

Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n+4}{4n^2+n-3}$ равен ...

1) ∞; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) $\dfrac{3}{4}$; 4) 1.

Решение:

Разберем этот пример. При $n\to\infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности. Это неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Применять сразу теорему о пределе частного нельзя, так как она предполагает существование конечных пределов последовательностей. Разделив числитель и знаменатель на n^2, преобразуем данную последовательность.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+4}{4n^2+n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^2}}{4+\dfrac{1}{n}-\dfrac{3}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\dfrac{1}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}4+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2}}=\frac{3+0+0}{4+0-0}=\frac{3}{4}.$$

◆ Пример 2.7

Предел последовательности при $n\to\infty$

$\{x_n\}=\dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}$ равен ...

Варианты ответов: 1) 0; 2) 1; 3) ∞; 4) $\frac{1}{2}$.

Решение:

Числитель и знаменатель не имеют конечных пределов и поэтому сначала разделим их на старшую степень *n*.

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\cos n}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Используя свойство 8, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n\}=\frac{0}{1+0}=0.$$

◆ Пример 2.8

Предел последовательности $\{x_n\}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ при $n\to\infty$ равен ...

Варианты ответов:

1) ∞; 2) 2; 3) 0; 4) 1.

Решение:

Так как не существует конечных пределов слагаемых, то теорему о пределе суммы сразу непосредственно применять нельзя. Умножив и разделив формулу для $\{x_n\}$ на сопряженное выражение $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Разделим на $\sqrt{n}$:

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)+1}=\frac{0}{1+1}=0.$$

◆ Пример 2.9

Пусть темп инфляции составляет 1% в день. Через полгода первоначальная сумма уменьшится в … раз.

Указание: Для расчета следует использовать формулу сложных процентов:

$$Q = Q_0\left(1+\frac{P}{100}\right)^n,$$

где Q_0 — первоначальная сумма вклада в банк;

P — процент начисления за определенный период времени (день, месяц, год);

n — количество периодов времени хранения вклада;

Q — сумма вклада по истечении n периодов времени.

Решение:

$n = 182$ — число дней в полугодии;

Q_0 — начальная сумма.

$$Q = Q_0\left(1-\frac{P}{100}\right)^{182}.$$

Знак «–» означает инфляцию.

Воспользуемся формулой из 9-го свойства $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и преобразуем данное выражение.

$$Q = Q_0\left[\left(1-\frac{1}{100}\right)^{-100}\right]^{-\frac{182}{100}} \approx Q_0 \cdot e^{-1,82};$$

$$Q = \frac{Q_0}{e^{1,82}} \approx \frac{Q_0}{6}.$$

Ответ: такая инфляция уменьшит первоначальную сумму примерно в 6 раз.

Задания для самостоятельного решения

- Предел числовой последовательности:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6+\dfrac{1}{n+2}}{3+\dfrac{1}{n}}$ равен …

Варианты ответов: 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6+(0{,}2)^n}{(0{,}4)^n+10}$ равен …

Варианты ответов: 1) 0,2; 2) 0,4; 3) 0,5; 4) 0,6.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+4}$ равен …

Варианты ответов: 1) 0,5; 2) 1; 3) 4; 4) ∞.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2-3n}{3n+1}+\dfrac{n\cdot 2^{-n}}{n+5}\right)$ равен …

Варианты ответов: 1) 1; 2) –1; 3) $\dfrac{2}{3}$; 4) 0.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n-1}{n^2+n-1}$ равен …

Варианты ответов: 1) 0; 2) 1; 3) –1; 4) ∞.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5+n+2}{8n^5-n+1}$ равен …

Варианты ответов: 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{1}{8}$; 3) ∞; 4) 2.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n^2+8}$ равен …

Варианты ответов: 1) 0; 2) $\dfrac{1}{4}$; 3) $\dfrac{1}{8}$; 4) ∞.

▸ Найти пределы следующих числовых последовательностей:

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+6n+1}{3n+1}$;

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+1}{7n-1}$;

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+10n-5}{n^3+2n}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n-2}{n^3-n^2}$;

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^2-5n+2}{2n^2-4n}$;

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+2n^2+1}{3n^4+4n}$;

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)$;

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

16. Прирост населения в стране составляет $P = 5\%$ в год. Население удвоится за ... лет.

17. Темп инфляции составляет в месяц 6%. Чтобы прибыль от кредитования составляла 12% в год, процент годовой ставки кредита, выдаваемого банком, должен быть ...%.

2.1.2. Функция одной переменной

Определение функции. Пусть X и Y — некоторые числовые множества. Функция f — это множество таких упорядоченных пар чисел $(x; y)$, что $x \in X$ и $y \in Y$ и каждое x входит в одну и только одну пару этого множества. При этом говорят, что числу x поставлено в соответствие число y по какому-либо закону.

Это записывают так: $y = f(x)$, где x — это *аргумент*, или *независимая переменная* (ее меняем мы сами); y — *функция*, или *зависимая переменная*. Ее значения меняются вследствие изменения аргумента.

Говорят, что определена *функциональная зависимость* y от x по закону $y = f(x)$.

Множество X — область определения (существования) функции (ООФ). Ее образуют те значения независимой переменной x, при которых правая часть формулы $y = f(x)$ существует (имеет смысл).

Множество Y — область значений (изменения) функции.

При нахождении области определения функции следует учитывать, что:

1. Дробь имеет смысл, если ее знаменатель отличен от нуля.

2. Корень четной степени существует, если подкоренное выражение неотрицательно.

3. Корень нечетной степени существует при любом значении подкоренного выражения.

4. Функция $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) определена на множестве всех действительных чисел $x \in R$.

5. Логарифмы отрицательных чисел не существуют.

6. Областью определения функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$ является множество всех действительных чисел $x \in R$.

7. Функция $y = \mathrm{tg}\, x$ определена, если $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

8. Функция $y = \mathrm{ctg}\, x$ определена, если $x \neq \pi n$, $n \in Z$.

9. Функции $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ определены, если $-1 \leq x \leq 1$.

- Если функция $f(x)$ определена на некотором множестве X и необходимо найти значение этой функции, соответствующее некоторому значению аргумента x_0, то в уравнение функции следует подставить это значение x_0.

Например, $f(x) = 3x^3$; пусть $x_0 = 2$,
то $f(x_0) = f(2) = 3 \cdot 2^3 = 24$.

- *Постоянная функция C* — это функция, все значения которой равны между собой. $f(x) = C$
- *Функция ограничена*, если есть такое число $M > 0$, что для любого $x \in X$ будет $|f(x)| \leq M$, т.е. множество Y значений функции ограничено.

  Функция неограничена — в противном случае.

Например, функция $y = \sin x$ ограничена на всей оси, так как есть число $M = 1$ и $\sin x \leq 1$ при любом x.

Способы задания функции. Задать функцию — это значит указать *закон*, по которому каждому значению аргумента x ставится в соответствие (иначе говоря, вычисляется) значение функции y из области значений функции Y. Существуют три способа задания функций: *табличный*, *аналитический* и *графический.*

1. ***Табличный способ*** заключается в задании функции таблицей соответствующих значений переменных x и y, которые получаются опытным путем. Этот способ имеет широкое применение в различных отраслях знаний и приложениях: известны таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов, социологические опросы, таблицы экспериментальных измерений, таблицы бухгалтерской отчетности, таблицы деятельности банка. В таких таблицах одна переменная (чаще всего время) является аргументом, а все другие величины будут функциями этого аргумента. На табличном способе задания функции основаны широко применяемые реляционные базы данных — это по сути дела табличный способ задания, хранения и обработки информации.

2. ***Аналитический способ*** заключается в задании функции при помощи некоторой формулы, которая имеет смысл при всех значениях аргумента x, для которых определена функция. Задается связь между аргументом и функцией в виде формул.

Например:

1) $y = x^2$ — это функция, область определения которой $X = (-\infty; +\infty)$, а множество значений $Y = (0, +\infty)$ — полуинтервал;
2) $y = sin\ x$. Область определения этой функции. X — это множество всех вещественных чисел $x = (0, +\infty)$, а множество значений функции Y — это множество чисел, заключенных между –1 и +1: $Y = [-1, +1]$;

3) $y = x^3$ — кубическая парабола. Эта функция задана на бесконечной прямой $-\infty < x < \infty$. ООФ: $(-\infty; \infty)$. Множество значений этой функции — бесконечная числовая прямая $-\infty < y < \infty$;

4) $y = \sqrt{1 - x^2}$. Это функция задана на отрезке $[-1, 1]$ или $X = \{|x| \le 1\}$. Множество значений функции — отрезок $[0, 1]$ или $Y = [0, 1]$;

5) $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

В этом примере аргумент (независимая переменная) обозначен n. Он может принимать целые положительные значения $n \in N = \{1, 2, \ldots\}$. Следовательно, y является функцией натурального аргумента и вычисляется по заданной формуле $Y = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$, образуя множество Q — множество рациональных чисел.

Функция может определяться и набором формул: на разных промежутках ООФ используются разные формулы.

Например:

6) $$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} +1, \text{ если } x > 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ -1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

sign (от лат. *signum* — знак).

ООФ: $(-\infty, \infty)$ — функция задана на всем бесконечном промежутке, а область значений функции состоит из трех чисел: $-1, 0, 1$.

3. ***Графический способ*** заключается в задании соответствия между переменными x (аргументом) и y (функцией) при помощи графика.

График функции $y = f(x)$ — это множество всех точек $(x; y)$ плоскости $0xy$, координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$, называемым уравнением графика функции.

Этот способ задания функции используется обычно в экспериментах, где используются самописцы, осциллограф и т.п.

Рассмотрим графики функций, приведенные в примерах 3, 4, 6 (рис. 2.3, а, б, в).

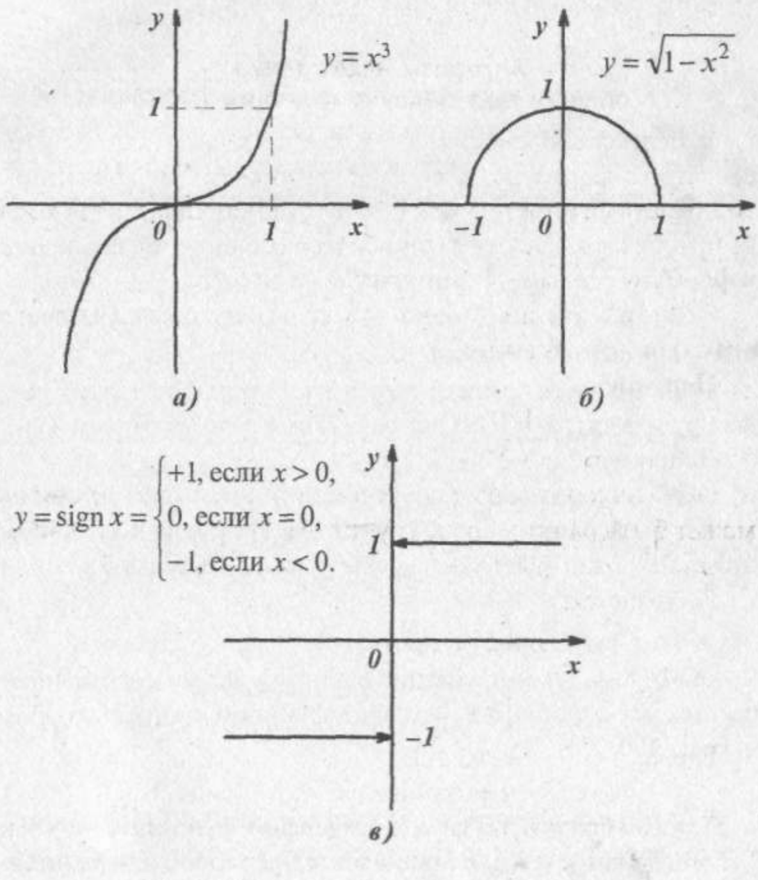


Рис. 2.3. Графики некоторых функций

Кубическая парабола $y = x^3$ представлена на рис. 2.3а.

График функции $y = \sqrt{1-x^2}$ (пример 4) представляет собой половину окружности, лежащую в верхней полуплоскости (рис. 2.3б). А график функции $y = \operatorname{sign} x$, приведенной в примере 6 (рис 2.3в), состоит из двух полупрямых со стрелками на концах. Стрелки означают, что полупрямые не достигают точек на оси ординат, ведь при $x = 0$ значение функции определено по другому условию ($y = 0$).

Алгоритм нахождения области определения функции (ООФ)

1. Если функция задана аналитически $y = f(x)$, т.е. посредством формулы, и не имеется никаких ограничений, то область ее определения (ООФ) устанавливается исходя из правил выполнения математических операций, входящих в формулу f в выражении $y = f(x)$.

Эти ограничения хорошо известны и изложены в начале этой главы (пункты 1–9).

Например:

1) $y = \arcsin \dfrac{1}{x+2}$.

ООФ находится из двух условий: знаменатель дроби не может быть равным нулю (пункт 1) и аргумент под знаком arcsin не может быть по модулю больше 1 (пункт 9).

Получается:

$$\begin{cases} -1 \le \dfrac{1}{x+2} \le 1, \\ x \ne 2. \end{cases}$$

Иначе $\qquad x + 2 \ge 1;$

$\qquad\qquad x + 2 \le -1.$

Таким образом, область определения функции $(-\infty, -3]$ и $[-1, \infty)$. Точка $x = -2$, являющаяся запретной, сюда не попадает, т.е. второе условие выполняется.

2) $y = \log_2(x^2 - 5x + 6)$.

ООФ находится из условия (пункт 5), что логарифмы отрицательных чисел не существуют.

$$x^2 - 5x + 6 > 0.$$

Отсюда $x = 2$, $x = 3$ — это корни квадратного уравнения. Следовательно, ООФ $(-\infty, 2)$ и $(3, \infty)$.

На отрезке [2, 3] функция не существует.

2. Если область определения функции $y = f(x)$ задана вместе с функцией $f(x)$, то специально ООФ находить не надо.

Например,

$$y = 2x^{-\frac{4}{3}} + 8 \qquad 1 \le x \le 4.$$

3. Если функция имеет определенный прикладной характер, то область ее существования определяется также реальными значениями входящих параметров. Часто это имеет место в задачах с физическим или экономическим смыслом и т.п.

Пример:

Рассмотрим прикладное использование функции в области экономики на примере изучения кривых спроса D и предложения S.

При постоянной покупательной способности населения эти кривые носят экспоненциальный (логарифмический) характер и описываются следующими уравнениями:

$$D = p^a + C_1 \qquad a < 0;$$
$$S = p^b + C_2 \qquad b \ge 1. \tag{2.3}$$

Зависимость спроса D от цены на товар p $D(p)$ (на рис. 2.4 кривая D) имеет вид нисходящей кривой: чем меньше цена p, тем больше спрос D. Зависимость же предложения S от цены на товар $S(p)$ (на рис. 2.4 кривая S) имеет вид восходящей экспоненты: с увеличением цены на товар растет предложение.

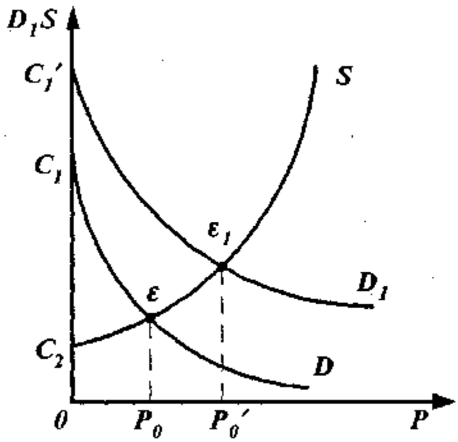


Рис. 2.4. Кривые спроса D и предложения S

Постоянные C_1 и C_2 в уравнениях (2.3) являются экзогенными (т.е. внешними) величинами. Они зависят от внешних причин: политической обстановки, благосостояния общества и т.п.

Экономистов интересует точка равновесия ε — точка пересечения кривых S и D, когда спрос равен предложению:

$$D(p) = S(p).$$

Цена p_0, при которой это условие выполняется, называется *равновесной ценой.* (рис. 2.4).

Интересная картина наблюдается на графике при увеличении благосостояния населения. При этом растет экзогенная величина C_1', кривая D поднимается вверх и точка равновесия ε_1 смещается вправо при неизменной кривой предложения $S(p)$ (рис. 2.4), цена на товар p_0' растет.

◆ Пример 2.10

Укажите область определения функции $y = \sqrt{2^x - 3^x}$.

Варианты ответов:

1) $x > 0$; 2) $x \le 0$; 3) $x \ge 1$; 4) $x < 1$.

Решение:

Согласно пунктам 2 и 4 получим $2^x - 3^x \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 3^x$. Разделим на 3^x:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \geq 1 \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \left(\frac{2}{3}\right)^0 \Rightarrow x \leq 0, \text{ так как } 0 < \frac{2}{3} < 1.$$

◆ Пример 2.11

Область определения функции $y = \sqrt[4]{6 - x - x^2} + \sqrt[3]{14 - x^2}$ имеет вид …

Решение:

Согласно пункту 2 получаем, что ООФ составляют те значения x, для которых существует корень четвертой степени, т.е. при $6 - x - x^2 \geq 0 \Rightarrow 6 - x - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 2$.

Ответ: ООФ $-3 \leq x \leq 2$.

◆ Пример 2.12

Изучая модель торга между покупателем и продавцом (рис. 2.5) (модель паутинного рынка), установлено, что как

Рис. 2.5. *Кривая торга между продавцом и покупателем*

только продавец называл цену p_1 (выше равновесной p_0), покупатель определял свою цену p_2 (ниже равновесной p_0). Как только продавец, оценивая спрос D_2, определяя свою цену p_3 (выше равновесной p_0), сразу же у покупателя возникла цена p_4 (ниже равновесной p_0).

Предел последовательности цен p_n, называемых в процессе торга, равен…

$$\lim_{n \to \infty} p_n = \ldots$$

Решение:

Этот устойчивый узел в виде *скручивающейся спирали* имеет своим пределом равновесную цену p_0.

- Задание функции *явное*, если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешенным относительно y.

  Например, $y = \sin 2x$; $y = 4x^3 - 6$.

  В противном случае имеет место *неявное* задание функции.

  Например, в уравнении $y = -4 - x^2$ — ни одно из действительных чисел x и y не удовлетворяет ему.

- *Сложная функция* — это функция, заданная в виде $y = f(\varphi(x))$ или $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, где u — промежуточный аргумент, а x — независимая переменная.

Например, функцию $y = \sin\left(\dfrac{1}{1-x^3}\right)^2$ можно представить как сложную:

$$u = \frac{1}{1-x^3} \text{ и } y = f(u),\ y = \sin u^2.$$

- *Четная функция*. Функция $y = f(x)$, область определения которой симметрична относительно начала координат, называется *чётной*, если для любого значения x из этого промежутка имеет место равенство $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат (рис. 2.6а).

Например:

1) $y = \cos x$ — четная функция, так как $\cos(-x) = \cos x$;

2) $y = \sqrt{1-x^2}$ — четная, так как

$f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = f(x)$.

- *Нечетная функция*. Функция $y = f(x)$, область определения которой симметрична относительно нуля, называется *нечетной*, если для любого значения имеет место равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 2.6б).

Например, $y = \sin x$ — нечетная функция, так как $\sin(-x) = -\sin x$.

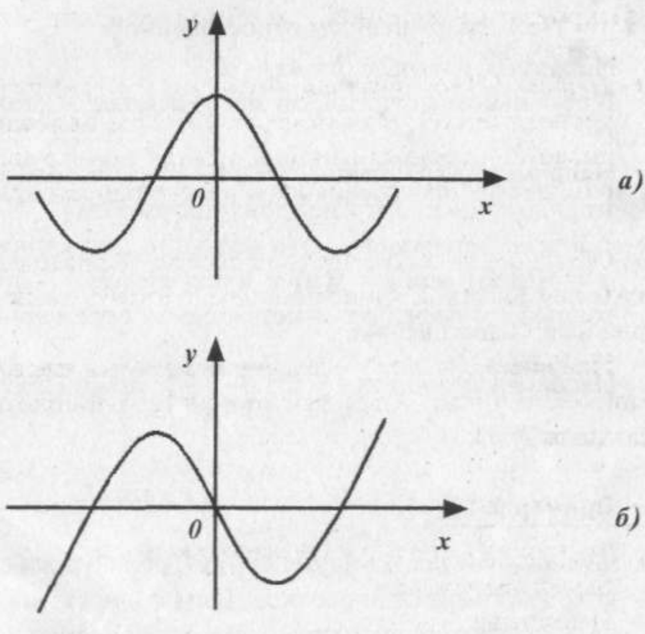


Рис. 2.6.
Графики четной (а) и нечетной (б) функций

- *Функции общего вида* — это функции, которые не являются ни четными, ни нечетными.

Так, $y = x^4 + x^2$, определенная в промежутке $-2 \le x \le 10$, не является ни четной, ни нечетной, так как ее область определения не симметрична относительно начала координат, хотя формально $f(-x) = f(x)$.

Определяя четность или нечетность функции, следует помнить, что:

1) сумма четных функций — функция четная;
2) сумма нечетных функций — функция нечетная;
3) произведение четных функций — функция четная;
4) произведение двух нечетных функций — функция четная;
5) произведение четной и нечетной функций — функция нечетная.

- *Периодическая функция*. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое положительное число T — период функции, что для любого значения x из области определения функции выполняется равенство

$$f(x \pm T) = f(x).$$

Обычно в качестве периода берется наименьшее положительное число T, удовлетворяющее этому равенству, если такой период существует.

Например, $y = \sin x$ — периодом является число $T = 2\pi$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, а для функции $y = \mathrm{tg}x$ периодом является число $T = \pi$.

Пример 2.13

Функция $f(x) = x^4 \cdot \sqrt[5]{x} + 2\sin x$ является ...

Варианты ответов:

1) нечетной;
2) четной;
3) ни четной, ни нечетной;
4) смотря, при каких значениях x.

Решение:

Область определения функции (ООФ): $x \in (-\infty, +\infty)$, она симметрична относительно нуля.

$$f(-x) = (-x)^4 \cdot \sqrt[5]{-x} + 2\sin(-x) = (x^4 \cdot (-\sqrt[5]{x})) - 2\sin x =$$
$$= -(x^4 \cdot \sqrt[5]{x} + 2\sin x) = -f(x)$$

Таким образом, $f(-x) = -f(x)$, следовательно, данная функция — нечетная.

◆ Пример 2.14

Основной период функции $f(x) = \sin 10x$ равен …

Варианты ответов: 1) 2π; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{5}$; 4) π.

Решение:

Функция $y = \sin x$ имеет основной период 2π. А период функции $y = \sin 10x$ в 10 раз меньше, т.е. $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$.

- Функция $y = f(x)$, $x \in (a, b)$, называется *возрастающей* на интервале (a, b), если при любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу,
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$
- Функция $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, называется *убывающей* на интервале (a, b), если при любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу,
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$
- *Интервалы монотонности* — это интервалы, в которых функция или только возрастает, или только убывает.

Например, функция, представленная на рисунке 2.7, возрастает на интервале (– 5; –3) и убывает на интервале (–3; 0). На этих интервалах она строго монотонна. На интервале (0; 3) она не убывает и монотонная.

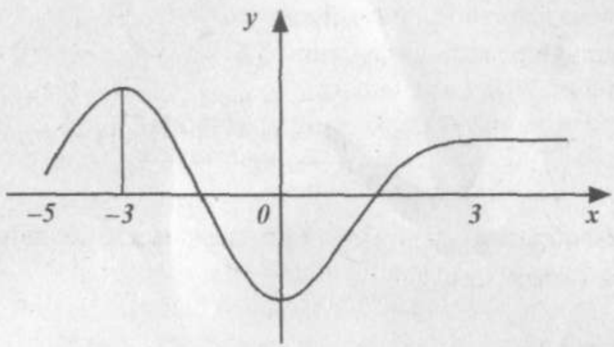


Рис. 2.7. График функции

Задания для самостоятельного решения

‣ Найти область определения следующих функций:

18. $y=\dfrac{1}{x^2}$; ООФ …

19. $y=\sqrt{4-x^2}$; ООФ …

20. $y=\dfrac{x}{x+3}$; ООФ …

21. $y=\dfrac{x+5}{x^2-1}$; ООФ …

22. $y=\sqrt[3]{2x-1}$; ООФ …

23. $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2-4}$; ООФ …

24. $y=\sqrt[4]{6-x}$; ООФ …

25. $y=\sqrt{-x^2}$; ООФ …

26. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; ООФ …

27. $y=\log_2(x-1)$; ООФ …

28. $y=3x-2$; ООФ …

29. $y=x^2-5x+6$; ООФ …

30. $y=\dfrac{2x-4}{3x-2}$; ООФ …

31. $y=\sqrt{x^2-9}$; ООФ …

32. $y=\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3}$; ООФ …

33. $y=\sqrt{x-3}+\dfrac{1}{\sqrt{x-6}}$; ООФ …

▸ Найти множество значений y функции:

34. $y = \dfrac{1}{x^2}$; … **35**. $y = \sqrt{4 - x^2}$; …

▸ Выяснить, какой является данная функция:

1) четной; 2) нечетной; 3) ни четной, ни нечетной.

36. $y = |x|$; функция …

37. $y = x$; функция …

38. $y = \dfrac{1}{2 + x^4}$; функция …

39. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 5}$; функция …

40. $y = \dfrac{1}{1 - x^5}$; функция …

41. $y = \begin{cases} x^4 \text{ при } x \geq 0 \\ x^2 \text{ при } x < 0 \end{cases}$; функция …

42. Спрос и предложение на рынке на некоторый товар описываются линейными зависимостями вида

$$\begin{cases} D(p) = 19 - 2p \\ S(p) = 3 + 2p. \end{cases}$$

1. Равновесная рыночная цена p_0 равна …
2. Изобразить графически данную модель паутинного рынка и установить, является ли она «скручивающейся».

43. Спрос и предложение на некоторый товар на рынке описывается зависимостями вида:

$$\begin{cases} D(p) = 15 - 3p \\ S(p) = 1 + 4p. \end{cases}$$

Ответить на вопросы:

1. Равновесная рыночная цена p_0 равна …
2. Изобразить графически данную модель паутинного рынка и установить, является ли она «скручивающейся».

2.1.3. Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором промежутке X и пусть точка $x_0 \in X$ или $x_0 \notin X$. Составим из множества X последовательность точек: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, сходящихся к точке x_0. Значения функции в этих точках также образуют последовательность: $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$

- Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, если для любой сходящейся к x_0 последовательности значений аргумента x, соответствующая последовательность значений функций сходится к числу A.

  Это записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Односторонние (левый и правый) пределы функции

Левый предел — это односторонний предел функции, когда последовательность значений аргумента $x_n \to x_0$ слева от точки x_0, т.е. $x_n < x_0$.

Символическая запись левого предела функции

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = A.$$

Правый предел — это односторонний предел функции, когда последовательность значений аргумента $x_n \to x_0$ справа от точки x_0, т.е. $x_n > x_0$.

Символическая запись правого предела функции

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = A.$$

Теорема. *Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют левый и правый пределы, и они равны. В таком случае предел функции равен односторонним пределам.*

Основные теоремы о пределах функций

На них основано вычисление пределов элементарных функций.

1. Если C — постоянная величина, то $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$.

2. Если C — постоянная величина, то

$$\lim_{x\to x_o} Cf(x)=C\lim_{x\to x_o} f(x).$$

Арифметические операции над функциями, имеющими предел в точке $x=x_0$, приводят к функциям, также имеющим предел в этой точке.

Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют в точке x_0 пределы A и B:

$$\lim_{x\to x_o} f_1(x)=A,\quad \lim_{x\to x_o} f_2(x)=B.$$

3. Предел алгебраической суммы равен алгебраической сумме пределов:

$$\lim_{x\to x_o}(f_1(x)\pm f_2(x))=\lim_{x\to x_o} f_1(x)\pm\lim_{x\to x_o} f_2(x)=A\pm B.$$

4. Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x\to x_o}(f_1(x)\cdot f_2(x))=\lim_{x\to x_o} f_1(x)\cdot\lim_{x\to x_o} f_2(x)=A\cdot B.$$

5. Предел отношения равен отношению пределов, если предел знаменателя отличен от нуля:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_o} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_o} f_2(x)}=\frac{A}{B}.$$

◆ **Пример 2.15**

Предел многочлена $\lim\limits_{x\to 2}(6x^3+2x^2-3x+7)$ равен ...

Варианты ответов: 1) 11; 2) 49; 3) 0; 4) 57.

Решение:

Для вычисления предела многочлена при $x\to x_0$ надо вместо переменной x подставить значение x_0, к которому она стремится, и подсчитать, используя соответствующие теоретические положения.

$$\lim_{x\to 2}(6x^3+2x^2-3x+7)=6\lim_{x\to 2}x^3+2\lim_{x\to 2}x^2-3\lim_{x\to 2}x+7=$$

$$=6\cdot 2^3+2\cdot 2^2-3\cdot 2+7=57.$$

◆ Пример 2.16

Предел функции $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ равен …

Варианты ответов: 1) 0; 2) 1,5; 3) 2; 4) 2,5.

Решение:

Используем теоремы 5 и 3 о пределе отношения и пределе суммы, а затем подставим $x=3$ в формулу дроби.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-4)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-3x+2)}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}x^2-\lim\limits_{x\to 3}4}{\lim\limits_{x\to 3}x^2-3\lim\limits_{x\to 3}x+\lim\limits_{x\to 3}2}=$$

$$=\frac{9-4}{9-9+2}=\frac{5}{2}=2{,}5.$$

◆ Пример 2.17

Предел отношения двух многочленов $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-2x-3}{x^3+3x+3}$ равен …

Решение:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-2x-3}{x^3+3x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^3-2x-3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^3+3x+3)}=\frac{3^3-2\cdot 3-3}{3^3+3\cdot 3+3}=\frac{18}{39}.$$

◆ Пример 2.18

Предел дроби $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3}$ равен …

Варианты ответов: 1) 1; 2) 2; 3) 0; 4) ∞.

Решение:

$$\lim_{x\to 4}\frac{5x+2}{2x+3}=\frac{5\cdot 4+2}{2\cdot 4+3}=\frac{22}{11}=2.$$

Часто встречаются случаи, когда непосредственно нельзя применить теорему о пределе частного. Это так называемые неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

В ситуации, когда числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю, говорят, что имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для раскрытия неопределенности такого вида надо числитель и знаменатель разложить на множители.

Если числитель и знаменатель неограниченно возрастают при $x \to \infty$, то в таком случае имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия надо разделить числитель и знаменатель дроби на старшую степень x.

◆ Пример 2.19

Предел дроби $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$ равен ...

Решение:

Здесь имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Это можно видеть, подставив $x=1$. Для решения разложим на множители числитель и знаменатель дроби, сократим общий множитель, после чего уже подставим предельное значение $x=1$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-1)}{(x+1)(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0.$$

◆ Пример 2.20

Предел дроби $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$ равен ...

Решение:

Это неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на старшую степень x (на x^3).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}}{4+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\frac{1}{4}.$$

◆ Пример 2.21

Предел дроби $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$ равен ...

Варианты ответов: 1) $\dfrac{1}{4}$; 2) $\dfrac{2}{3}$; 3) 0; 4) 3.

Решение:

Разделим числитель и знаменатель на x^4 (неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(3-\dfrac{2}{x^4}\right)}{\sqrt{x^8\left(1+\dfrac{3x}{x^8}+\dfrac{4}{x^8}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(3-\dfrac{2}{x^4}\right)}{x^4\sqrt{1+\dfrac{3}{x^7}+\dfrac{4}{x^8}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{2}{x^4}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x^7}+\dfrac{4}{x^8}}}=\frac{3}{1}=3.$$

◆ Пример 2.22

Предел дроби $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$ равен ...

Варианты ответов: 1) 0; 2) 2; 3) –1; 4) 1.

Решение:

Если непосредственно подставить в формулу $x=2$, то получим неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Разложим числитель и знаменатель (а это квадратные трехчлены) на множители и сократим общий множитель.

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

$$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-1}=\frac{2-3}{2-1}=-1.$$

◆ Пример 2.23

Предел функции $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ равен …

Варианты ответов: 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

Решение:

Это неопределенность вида $\frac{0}{0}$ — и числитель, и знаменатель дроби стремятся к нулю. Разложим и числитель и знаменатель для раскрытия неопределенности и применим теорему о пределе частного и пределе суммы.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-1)}=\frac{4}{1}=4.$$

◆ Пример 2.24

Предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ равен …

Варианты ответов: 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 8.

Решение:

Это неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, так как и числитель, и знаменатель стремятся к ∞ при $x\to\infty$. Разделим их на x^2 и применим теорему о пределе частного, которую до этого применять было нельзя.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{1}{1}=1.$$

◆ Пример 2.25

Предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+2}{x+1}$ равен ...

Варианты ответов: 1) 0; 2) 2; 3) 4; 4) 8.

Решение:

Это неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на x и применим теорему о пределе частного, а затем — теорему о пределе суммы.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\dfrac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{4+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}}{1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}}=\frac{4+0}{1+0}=4.$$

◆ Пример 2.26

Предел дроби $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^3+x^2+3}$ равен ...

Решение:

Так как это неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, то разделим числитель и знаменатель на x^3, после чего воспользуемся теоремой о пределе частного.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}\right)}=$$

$$=\frac{0+0+0}{1+0+0}=\frac{0}{1}=0.$$

Рассмотрим раскрытие неопределенности вида $\infty-\infty$. Для этого умножим и разделим данное выражение на сопряженное, после чего используем прием, рассмотренный выше: разделим числитель и знаменатель на старшую степень переменной x.

◆ **Пример 2.27**

Предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$ равен ...

Решение:

Умножим на сопряженное выражение $\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)$ и разделим на него.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}.$$

Теперь разделим числитель и знаменатель на $\sqrt{x}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=\frac{0}{\sqrt{1+0}+1}=0.$$

Задания для самостоятельного решения

44. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+4}{x-2}$;

45. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-1}{x^2-2x+1}$;

46. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+4}$;

47. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$;

48. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-2}{x^2-x+4}$;

49. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-2}{x^2-5x+7}$;

50. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4}{x^2-3}$;

51. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$;

52. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$;

53. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$;

54. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4}{x^2-3}$;

55. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$;

56. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$; **57.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$;

58. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

2.1.4. Два замечательных предела

В математике и ее приложениях широко используются два замечательных предела функции.

Теорема о первом замечательном пределе

Предел функции $\dfrac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$ существует и равен единице:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

◆ **Пример 2.28**

Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$ равен ...

Варианты ответов: 1) 0; 2) 1; 3) 5; 4) $\dfrac{1}{5}$.

Решение:

Чтобы использовать первый замечательный предел, надо преобразовать данную дробь так, чтобы в знаменателе был аргумент синуса. Для этого умножим и числитель, и знаменатель на 5, после чего можно применить теорему о первом замечательном пределе.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$$

◆ **Пример 2.29**

Предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$ равен ...

Варианты ответов: 1) 0; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 2.

Решение:

Преобразуем данную дробь, чтобы в знаменателе был аргумент синуса. Для этого числитель и знаменатель умножим на 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot 2}{3x\cdot 2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x\cdot 3}=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}.$$

◆ Пример 2.30

Предел выражения $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ равен ...

Решение:

Знаменатель дроби стремится к нулю при $x > 0$. Преобразуем данную дробь, используя формулу тригонометрии $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

◆ Пример 2.31

Предел выражения $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}$ равен ...

Решение:

Используя формулу тригонометрии $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)}{x^2}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{x}\right)^2=2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}=12{,}5.$$

◆ **Пример 2.32**

Предел выражения $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 6x}{x^2}$ равен ...

Решение:

Преобразуем данную дробь по формулам тригонометрии, для того чтобы применить теорему о первом замечательном пределе.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 6x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\cdot\sin 4x}{x^2}=$$

$$=2\cdot 2\cdot 4\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=16\cdot 1\cdot 1=16.$$

◆ **Пример 2.33**

Предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$ равен ...

Варианты ответов: 1) 3; 2) 20; 3) 10; 4) 45.

Решение:

Воспользуемся формулой из тригонометрии: преобразование разности косинусов в произведение.

$\cos 3x-\cos 7x=2\sin 5x\cdot\sin 2x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 5x\cdot\sin 2x}{x^2}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2\cdot 5\cdot 2=20.$$

Теорема о втором замечательном пределе

Предел функции $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\infty$ существует и равен e:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Число $e=2{,}71828$ является одной из фундаментальных величин в математике.

Логарифм числа x по основанию e называется *натуральным логарифмом* и обозначается $\ln x$. Показательная функция вида e^{ax} называется *экспонентой*.

Вычисляя пределы, можно использовать следующие равенства:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m.$$

◆ **Пример 2.34**

Предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ равен ...

Решение:

Проведем замену переменной, полагая $\frac{1}{x}=\alpha$.

Тогда $\alpha\to\infty$ при $x\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e.$$

◆ **Пример 2.35**

Предел выражения $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ равен ...

Решение:

Проведем замену переменной $x=2\alpha$. При $x\to\infty$ $\alpha\to\infty$ получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha}=\lim_{\alpha\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^2=e^2.$$

◆ **Пример 2.36**

Предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{3x^2}}$ равен ...

Решение:

Сделаем замену переменных $\frac{1}{3x^2}=\alpha$. При $x\to 0$ $\alpha\to\infty$:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{3x^2}}=\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e.$$

◆ **Пример 2.37**

Предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\log_a(1+x)}{x}\right)$ равен ...

Решение:

Преобразуем дробь, а затем перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\log_a(1+x)\right)=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\log_a\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\log_a e=\frac{1}{\ln a}.$$

Задания для самостоятельного решения

Найти предел функции, используя теоремы о двух замечательных пределах функции:

59. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$; **60.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{x}$;

61. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x^2}{x^2}$; **62.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$;

63. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$; **64.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg} 3x}$;

65. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}$; **66.** $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x$;

67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x-\sin 8x}{x}$; **68.** $\lim\limits_{x\to\infty}(1+4x)^{\frac{1}{4x}}$;

69. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x^2}$; **70.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3e^x+1}{3e^x}\right)^{2x^2}$;

71. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; **72.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$;

73. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{2x+1}$.

2.1.5. Непрерывность функции

Понятие непрерывной функции является фундаментальным в математическом анализе.

- Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если предел этой функции и ее значение в этой точке равны

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

или

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right).$$

- Функция $f(x)$ называется *непрерывной справа* в точке x_0, если правый предел этой функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0) \text{ или } f(x+0)=f(x_0).$$

- Функция $f(x)$ называется *непрерывной слева* в точке x_0, если левый предел этой функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0) \text{ или } f(x-0)=f(x_0).$$

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 справа и слева, то она непрерывна в этой точке.

Точки разрыва функции — это точки, в которых функция не является непрерывной.

Например, функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ (рис. 2.3в). Ее значение в точке $x = 0$ существует левый предел этой функции $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -1$ и правый предел $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$. Но эта точка $x = 0$ будет точкой разрыва функции, поскольку пределы слева и справа не равны по значению функции в этой точке.

Теорема. *Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) \cdot f_2(x)$ и $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ будут также непрерывны в точке x_0 (для дроби — при условии, что $f_2(x_0) \neq 0$).*

Непрерывность элементарных функций в точке

Постоянная функция $f(x) = C$ является непрерывной в любой точке числовой оси, согласно определению непрерывности функции в точке

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = C = f(x_0).$$

- Функция $f(x) = x$ непрерывна в каждой точке x_0 числовой оси, согласно определению — предел функции в точке x_0 равен ее значению в этой точке

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0 = f(x_0).$$

- Функции $f(x) = x^2 = x \cdot x$; $f(x) = x^3 = x^2 \cdot x$; $f(x) = x^n = x^{n-1} \cdot x$, где n — натуральное число, также непрерывные согласно последней теореме.
- Многочлен $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$ также является непрерывной функцией согласно последней теореме, так как он (многочлен) является суммой произведений непрерывных функций.
- Дробно-рациональная функция $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — алгебраические многочлены, согласно этой

теореме также непрерывна во всех точках числовой прямой за исключением корней знаменателя.

- Тригонометрические функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ непрерывны в любой точке x числовой оси.
- Тригонометрические функции
$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ и } \sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ —}$$
непрерывны во всех точках числовой оси, кроме $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.
- Тригонометрические функции
$$y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ и } \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \text{ —}$$
непрерывны во всех точках числовой оси, кроме $x \neq n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Все основные элементарные функции — постоянная, показательная, логарифмическая, степенная, тригонометрические, обратные тригонометрические непрерывные на своих областях определения.

Непрерывность функции на интервале и отрезке

Функция $f(x)$ непрерывна *на интервале* (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $f(x)$ непрерывна *на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b) и непрерывна в точке a справа и в точке b слева.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \to b-} f(x) = f(b).$$

Классификация точек разрыва функции

Точки разрыва, в которых функция не является непрерывной, классифицируются следующим образом.

- ***Устранимый разрыв.*** Точка x_0 называется точкой *устранимого разрыва* функции $f(x)$, если предел функции в этой точке существует, но в точке x_0 функция $f(x)$ не определена, либо ее значение в этой точке $f(x_0)$ не равно пределу в этой точке.

Например, функция $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$ имеет предел, равный единице. Это первый замечательный предел. Однако в самой точке $x=0$ эта функция не определена. Этот разрыв можно устранить, если доопределить функцию в этой точке: пусть $f(0)=1$ (значение предела в этой точке). Получится новая функция

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x},\ \text{если } x\neq 0,\\ 1,\ \text{если } x=0.\end{cases}$$

Функция $f(x)$ будет непрерывной на всей числовой прямой.

- ***Разрыв I рода***. Точка x_0 является точкой разрыва *первого рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)\neq \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

Например, рассмотренная выше функция

$$y=\operatorname{sign} x=\begin{cases}+1,\ \text{если } x>0,\\ 0,\ \text{если } x=0,\\ -1,\ \text{если } x<0,\end{cases}$$

для которой точка $x=0$ является точкой разрыва I рода.

- ***Разрыв II рода.*** Точка x_0 является разрывом *второго рода* функции $f(x)$, если в этой точке не существует хотя бы одного из односторонних пределов функции $f(x)$ или хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

Например, для функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$ точка $x=0$ является точкой разрыва II рода (рис 2.8), поскольку в этой точке $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-}\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$.

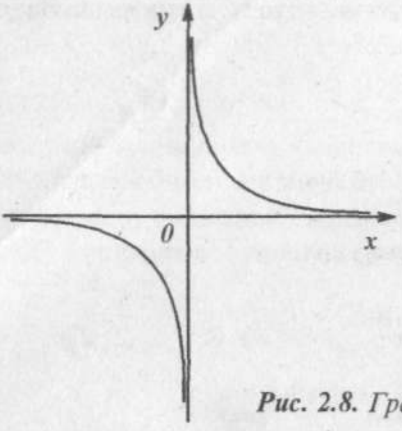


Рис. 2.8. График функции $y = \dfrac{1}{x}$

‣ ***Точка скачка функции*** — это точка, в которой левый и правый пределы функции в точке x_0 различны:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется *скачком функции* в точке x_0.

◆ Пример 2.38

Показать, что при $x = 4$ функция $y = \dfrac{x}{x-4}$ имеет разрыв, и это разрыв … рода.

Решение:

Найдем левый и правый пределы:

$$\lim_{x \to 4-0} \frac{x}{x-4} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 4+0} \frac{x}{x-4} = +\infty.$$

Видно, что при $x \to 4$ функция не имеет конечных

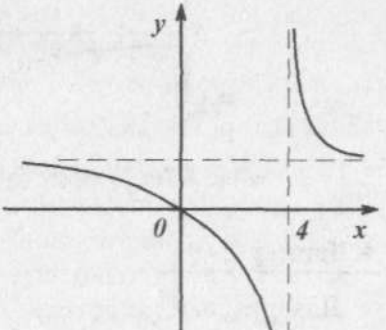


Рис. 2.9

График функции $y = \dfrac{x}{x-4}$

пределов. Следовательно, $x = 4$ — это точка разрыва II рода (рис. 2.9).

◆ Пример 2.39

Показать, что при $x = 4$ функция $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}$ имеет разрыв, и это разрыв … рода.

Решение:

Если $x = 4 - 0$, то $\dfrac{1}{x-4} \to -\infty$, и $\lim\limits_{x\to 4-0} y = -\dfrac{\pi}{2}$.

Если $x = 4 + 0$, то $\dfrac{1}{x-4} \to +\infty$, и $\lim\limits_{x\to 4+0} y = \dfrac{\pi}{2}$.

Видим, что функция y при $x = 4$ имеет левый и правый конечные пределы, не равные друг другу. Следовательно, точка $x = 4$ — это точка разрыва I рода — точка скачка. Скачок функции в точке $x = 4$ равен $\dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$ (рис. 2.10).

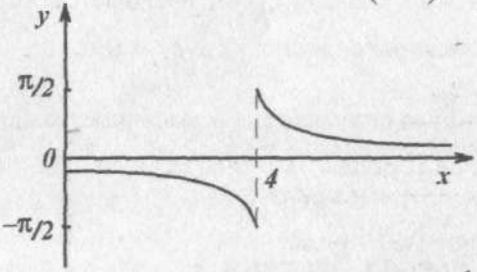


Рис. 2.10. График функции $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}$

◆ Пример 2.40

Для функции $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ точка $x = 0$ является точкой разрыва … рода.

Решение:

В этой точке не существует ни левого, ни правого предела функции. Это разрыв II рода.

◆ Пример 2.41

Функция $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ (рис. 2.11). Точка $x=0$ является точкой разрыва … рода.

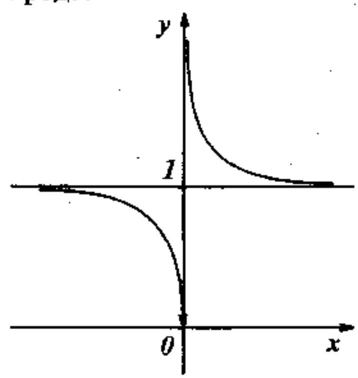


Рис. 2.11

Решение:

Предел слева равен нулю: $\lim\limits_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}}=0$.

Предел справа стремится к бесконечности: $\lim\limits_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}}=\infty$.
Это разрыв II рода.

2.1.6. *Сложная функция*

- Функция $y=f(\varphi(x))$ называется *сложной функцией от* x, если на некотором промежутке X определена функция $z=\varphi(x)$ со множеством значений Z и на множестве Z определена функция $y=f(z)$. Переменная z называется промежуточной переменной сложной функции.

Например:

1. $y=\cos\sqrt{1-x}$ — сложная функция, определенная на $(-\infty, 1]$, так как $y=f(z)=\cos z$, $z=\varphi(x)=\sqrt{1-x}$.

2. $y = e^{-x^2}$ — сложная функция, определенная на всей числовой прямой, так как $y = f(z) = e^z$, $z = \varphi(x) = -x^2$.

Теорема. *Пусть функция $z = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(z)$ непрерывна в точке $z_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.*

Например, функция $y = \mathrm{tg}(x^2 + x)$ непрерывна в точке $x = 0$, потому что функция $z = \varphi(x) = x^2 + x$ непрерывна в точке $x = 0$, а функция $y = f(z) = \mathrm{tg}\, z$ непрерывна в точке $z = 0$.

◆ Пример 2.42

Функция $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ непрерывна на множестве точек…

Ответ: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Решение:

Функцию $f(x)$ можно представить как сумму функций

$f_1(x) = x^2$ и $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$.

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

ООФ $f_1(x)$: $x \in R$. Следовательно, она непрерывна на этой области определения при всех $x \in R$.

ООФ $f_2(x)$: все $x \in R$, кроме точки $x = 0$. Следовательно, она непрерывна на множестве $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Согласно теореме, сумма двух непрерывных функций $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ будет непрерывной там, где непрерывны обе функции.

Вывод: $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ непрерывна при $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

◆ Пример 2.43

Функция $f(x) = \sin x^2$ непрерывна на множестве:

Варианты ответов:

1) $(-1, 1)$; 2) $x \in R$; 3) $[-1, +1]$; 4) $(0, +\infty)$.

Решение:

$f(z)=\sin z,\ z=\varphi(x)=x^2.$

Функция $\varphi(x)=x^2$ непрерывна при всех $x\in R$. Функция $f(z)=\sin z$ непрерывна при $z\in(-\infty,\infty)$.

Следовательно, сложная функция $f(x)=\sin x^2$ непрерывна при всех $x\in R$.

◆ Пример 2.44

Используя свойство непрерывности элементарных функций, вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1-x} \text{ равен } \ldots$$

Варианты ответов: 1) 0; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) 1; 4) 2.

Решение:

Функция $f_1(x)=\cos x$ непрерывна при всех $x\in R$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$.

Функция $f_2(x)=1-x$ непрерывна при всех $x\in R$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)=1-0=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1-x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}{\lim\limits_{x\to 0}(1-x)}=\frac{1}{1}=1.$$

◆ Пример 2.45

Используя свойство непрерывности элементарных функций, вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{x^2}} \text{ равен } \ldots$$

Варианты ответов: 1) 1; 2) e; 3) e^2; 4) e^3.

Решение:

Умножим числитель и знаменатель показателя вышеуказанной функции на 3:

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{3x^2}}\right)^3.$$

Функция $f(z)=z^3$ является непрерывной при всех $z\in R$.

$$\lim_{x\to 0} z^3(x)=\left(\lim_{x\to 0} z(x)\right)^3;$$

$$z(x)=\left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{3x^2}};$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{3x^2}}=e;$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{3x^2}}\right)^3=e^3.$$

◆ Пример 2.46

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x+1}\right)^x$, используя свойство непрерывности элементарных функций.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^x \text{ равен } \ldots$$

Решение:

Преобразуем $x=2x\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(2x+1)-\dfrac{1}{2}$.

Тогда выражение примет вид:

$$\left(1+\frac{1}{2x-1}\right)^x=\left(\left(1+\frac{1}{2x-1}\right)^{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$.

Заменим $2x+1=\alpha$:

$$\left(1+\frac{1}{2x-1}\right)^{2x+1}=\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}.$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e.$$

Функция $f_1(x)=\left(\left(1+\frac{1}{2x-1}\right)^{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ непрерывна при выражении в скобках больше либо равно нулю. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2x-1}\right)^{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

Функция $f_2(x)=\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}$ непрерывна, если выражение в скобках больше нуля.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}=1^{-\frac{1}{2}}=1.$$

Окончательно, используя теоремы о свойствах пределов, имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{x}=\sqrt{e}\cdot 1=\sqrt{e}.$$

Задания для самостоятельного решения

- Найти точки разрыва функций и определить типы разрывов:

74. $y=\frac{x}{x+2}$ $\quad x=\ldots$ Разрыв … рода;

75. $y=2^{-\frac{1}{x}}$ $\quad x=\ldots$ Разрыв … рода;

76. $y=\operatorname{tg}x$ $\quad x=\ldots$ Все разрывы … рода;

77. $y=e^{\operatorname{tg}x}$ $\quad x=\ldots$ Все разрывы … рода;

78. $y=e^{-|\operatorname{tg}x|}$ $\quad x=\ldots$ Все разрывы … рода;

79. $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ $x_1=\ldots$ Разрыв … рода;
$x_2=\ldots$ Разрыв … рода;

80. $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$ $x_1=\ldots$ Разрыв … рода;
$x_2=\ldots$ Разрыв … рода.

▸ Найти множество, на котором непрерывна функция:

81. $y=3x^2-1$; **82.** $y=\dfrac{1}{x^2}+4x$;

83. $y=x+\ln x$; **84.** $y=\dfrac{\cos x}{x}$;

85. $y=x^3e^x$; **86.** $y=\dfrac{e^x}{x-1}$;

87. $y=\sin\dfrac{1}{x}$; **88.** $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-4}$.

▸ Найти предел функции, используя непрерывность функции:

89. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{x^2+4}$; **90.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x}$;

91. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$; **92.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x^3}{3}\right)^{\frac{1}{x^3}}$;

93. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$; **94.** $\lim\limits_{x\to 1}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$;

95. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$; **96.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{4x^2+3}\right)^{2x^2}$;

97. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{1+x^2}\right)^{x^2}$.

2.1.7. Производная функции

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 — это предел отношения приращения функции Δy в этой точке к соответствующему приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$.

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Производная обозначается y' («игрек штрих») или $f'(x)$ («эф штрих от икс») или $\frac{dy}{dx}$ («дэ игрек по дэ икс»).

Геометрически производная представляет угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ (рис. 2.12) в соответствующей точке $M_1(x_0, y_0)$ $\operatorname{tg}\alpha = y' = f'(x_0)$.

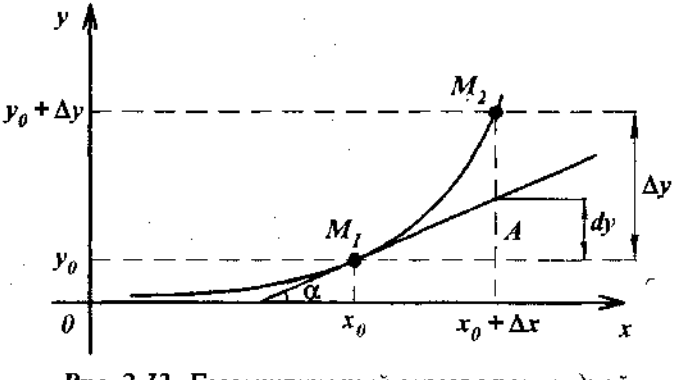


Рис. 2.12. Геометрический смысл производной

Физический смысл производной. y' — это скорость изменения функции $y = f(x)$ относительно ее аргумента x. Производная y' характеризует быстроту изменения функции, т.е. скорость роста. Отрицательная скорость роста означает падение — уменьшение y при увеличении x, т.е. скорость убывания функции. Производная y' указывает на *тенденции*, характерные для изменения y, и позволяет судить о том, что можно ожидать при дальнейшем изменении аргумента.

Производная 2-го порядка — это производная от производной первого порядка: $y'' = (y'(x))'$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ (читается «дэ два игрек по дэ икс дважды»).

Производная n-го порядка — это производная от производной $(n-1)$ порядка: $y^{(n)} = (y^{(n-1)}(x))'$.

Например, *ускорение* $a = \frac{dv}{dt}$ — это первая производная от скорости по времени или вторая от перемещения по времени $a = \frac{d^2S}{dt^2}$.

Линейная скорость $v = \frac{dS}{dt}$ — это первая производная от перемещения по времени.

Таблица 1

Таблица производных

1	$(c)' = 0$, где C — постоянное число	10	$(e^x)' = e^x$
2	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	11	$(\sin x)' = \cos x$
3	$(uv)' = u'v + v'u$	12	$(\cos x)' = -\sin x$
4	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	13	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
5	$(cu)' = cu'$	14	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
6	$(x^n)' = nx^{n-1}$	15	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	16	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
8	$(a^x)' = a^x \ln a$	17	$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$
9	$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$	18	$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

◆ Пример 2.47

$y = x^2 - 4x + 3$. Вычислить y'.

Решение:

$y' = (x^2 - 4x + 3)' = (x^2)' - (4x)' + (3)'$.

Применяя формулы (3, 5, 6) таблицы 1, получим: $y' = 2x - 4$.

◆ Пример 2.48

$$y = \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^3}.$$

Решение:

Вводя дробные и отрицательные показатели, преобразуем данную функцию: $y = x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{3}} - x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-3}$.

Применяя формулы (5 и 6), получим:

$$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + 5\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1} - (-2)x^{-2-1} + \frac{(-3)}{3}x^{-3-1} =$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{3}x^{-\frac{4}{3}} + 2x^{-3} - x^{-4};$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}.$$

◆ Пример 2.49

$f(x)\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$. Вычислить $f'(1)$.

Решение:

Используя формулы (4 и 6), получим:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x})'(1+\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x})'\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}) - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}.$$

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}(1+\sqrt{1})^2} = \frac{1}{2\cdot 2^2} = \frac{1}{8}.$$

◆ Пример 2.50

$y = \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x}$. Вычислить y'.

Решение:

Раскрываем скобки и производим деление:

$$y = \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x} = \frac{1+2\sqrt{x}+x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 1.$$

Используем дробные и отрицательные показатели, приводя данное выражение к табличному виду (6).

$$y = x^{-1} + 2x^{-\frac{1}{2}} + 1.$$

Находим производную y':

$$y' = -x^{-2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

◆ Пример 2.51

Найти производную 2-го порядка от функции $y = x\cdot\sin x$.

Решение:

Используя формулы (3, 11 и 12), получим:

$$y' = (x)'\sin x + x(\sin x)' = \sin x + x\cdot\cos x.$$

Дифференцируя производную y', имеем:

$$y'' = (\sin x)' + (x)'\cos x + x(\cos x)' = \cos x + \cos x - x\sin x =$$
$$= 2\cos x - x\sin x.$$

◆ Пример 2.52

Движение летчика при катапультировании из реактивного самолета можно приблизительно описать формулой $S = 3{,}7t^3 + \ln t - 19t$ (*м*). Определить скорость и ускорение летчика через 2 *с* после катапультирования.

Решение:

Используя определение линейной скорости, а также формулы (5, 6 и 7), получим:

$$v = \frac{dS}{dt},\ v = (3{,}7t^3 + \ln t - 19t)',$$

тогда $$v = 3{,}7 \cdot 3t^2 + \frac{1}{t} - 19 \ (м/с);$$

$$v_{t=2} = 11{,}1 \cdot 2^2 + \frac{1}{2} - 19 = 25{,}9 \ (м/с).$$

Используя определение ускорения, получим:

$$a = \frac{dv}{dt};\ a = \left(11{,}1t^2 + \frac{1}{t} - 19\right)';\ a = 22{,}2t - \frac{1}{t^2} \ (м/с^2);$$

$$a_{t=2} = 22.2 \cdot 2 - \frac{1}{4} = 44{,}15 \ (м/с^2).$$

◆ Пример 2.53

В какой момент времени скорость тела, движущегося по закону $S = 3t^2 - 15t + 2$, равна 0? Найти ускорение тела.

Решение:

Скорость тела v — это первая производная от перемещения $\bar{S}$ по времени: $\bar{v} = \dfrac{d\vec{S}}{dt}$; $v = (3t^2 - 15t + 2)' = 6t - 15$.

Если $v = 0$, то $0 = 6t - 15 \Rightarrow t = \dfrac{15}{6} = 2{,}5$ (*с*).

Ускорение $\bar{a}$ — это первая производная от скорости $\bar{v}$ по времени: $\bar{a} = \dfrac{d\bar{v}}{dt}$; $a = (6t - 15)' = 6$ (*м/с*^{2}).

Производная сложной функции

Если $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, т.е. если y зависит от x через посредство промежуточного аргумента u, то y называется сложной функцией от x.

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной:

$$y' = f'(u) \cdot u'(x).$$

Некоторые формулы таблицы производных теперь будут иметь вид:

$$(u^n) = nu^{n-1} \cdot u',$$
$$(\sin u)' = \cos u \cdot u',$$
$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u' \text{ и т.д.}$$

Найти производные следующих функций.

◆ Пример 2.54

$y = (1+5x)^3$. Вычислить y'.

Решение:

Полагаем $1 + 5x = u$ и $y = u^3$. Тогда, применяя правило диффереицирования сложной функции, имеем:

$$y' = 3u^2(1+5x)' = 3(1+5x)^2 \cdot 5 = 15(1+5x)^2.$$

◆ Пример 2.55

$y = \sin 3x$. Вычислить y'.

Решение:

Полагая $3x = u$, найдем, используя соответствующие формулы:

$$y' = (\sin 3x)' = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos 3x \cdot 3, \; y' = 3\cos 3x.$$

◆ Пример 2.56

$y = \sin x^3$. Вычислить y'.

Решение:

Полагая $x^3 = u$, найдем:

$$y' = (\sin x^3)' = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = 3x^2 \cos x^3.$$

◆ Пример 2.57

Точка совершает колебательные движения по оси абсцисс по закону $x = \cos \omega t$. Найти момент времени, когда скорость равна нулю. Чему в это время равно смещение x?

Решение:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega \sin \omega t;\ 0 = \omega \sin \omega t \Rightarrow t = \frac{k\pi}{\omega};$$

$$x = \cos \frac{\omega k\pi}{\omega} = \pm 1.$$

Применение производной для решения прикладных задач

- Скорость изменения некоторой переменой величины x определяется как производная её по времени $\frac{dx}{dt}$.

◆ Пример 2.58

В результате значительной потери крови содержание железа в крови уменьшилось на 210 *мг*. Недостаток железа вследствие его восстановления с течением времени t уменьшается по закону $y = 210e^{-\frac{t}{7}}$ *мг* (t — в сутки). Найти зависимость скорости восстановления железа в крови от времени. Вычислить эту скорость в момент $t = 0$ и через 7 суток.

Решение:

Скорость восстановления железа:

$y' = -\frac{1}{7} 210e^{-\frac{t}{7}} = -30e^{-\frac{t}{7}}$. Знак «–» указывает на уменьшение недостачи.

При $t = 0$ скорость восстановления равна 30 мг/сутки. Через 7 суток скорость восстановления равна:

$$y'_{t=7} = -30e^{-\frac{7}{7}} = 30e^{-1} = \frac{30}{e} = \frac{30}{2{,}7} = 11{,}1 \frac{\textit{мг}}{\textit{сутки}}.$$

Примечание. Релаксационный процесс — это процесс возвращения системы к состоянию устойчивого равновесия, из которого она была выведена. Во многих случаях (особенно при однократном воздействии) этот процесс описывается экспоненциальным уравнением $y = y_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, где τ — постоянная времени. Ее физический смысл: это время, в течение которого начальное отклонение y_0 уменьшается в e раз (т.е. в 2,7 раза). В данной задаче постоянная времени — 7 суток.

◆ Пример 2.59

Зависимость между массой вещества, получаемой в некоторой химической реакции, от времени t определяется формулой $M = 7(1+2e^{-5t})$. Найти скорость реакции.

Решение:

Надо взять производную от M по времени t:

$$\frac{dM}{dt} = (7+14e^{-5t})' = -14\cdot 5\cdot e^{-5t} = -70e^{-5t}.$$

- В прогнозах и анализе ценовой политики широко применяется понятие эластичности спроса относительно цены товара. Спрос $D = f(P)$ — это функция от цены товара P. *Эластичность спроса* E — это процентное изменение спроса D при изменении цены товара P на один процент.

$$E = \frac{\Delta D/D}{\Delta P/P} \text{ или } E = \frac{dD/D}{dP/P}.$$

Эту формулу можно записать и так: $E = P\frac{D'(P)}{D(P)}$, учитывая, что $\Delta P = 1\%$.

Функция спроса относительно цены $D(P)$ убывает с ростом цены.

◆ Пример 2.60

Пусть спрос D зависит от цены P таким образом:

$$D = 15 - P \text{ при цене } P = 5.$$

Если цена увеличивается на 1%, то величина спроса … (возрастает, убывает, не изменится) на … %.

Решение:

$$E = P\frac{D'(P)}{D(P)},\ D'(P) = (15 - P)' = -1.$$

$$E = P\frac{-1}{15-P} = 5\cdot\frac{-1}{15-5} = \frac{-5}{10} = -0{,}5\ \ (\%).$$

Ответ: упадет на 0,5%.

◆ Пример 2.61

Пусть себестоимость продукции C зависит от объема Q ее производства следующим образом:

$$C = 50 - 0{,}4Q.$$

При выпуске продукции $Q = 30$ эластичность себестоимости равна … , а себестоимость … (снижается, увеличивается).

Решение:

$$E = P\frac{D'(P)}{D(P)} \quad C'(Q) = (50 - 0{,}4Q)' = -0{,}4;$$

$$E = \frac{-0{,}4Q}{50-0{,}4Q} = \frac{-0{,}4\cdot 30}{50-0{,}4\cdot 30} = -3{,}2\ \ (\%).$$

Увеличение объема выпуска продукции на 1% приведет к снижению себестоимости на 0,32%.

Задания для самостоятельного решения

▸ Найти производные первого порядка:

98. $y = \sqrt{x} + 5\sqrt[3]{x^2} + x$; **99.** $y = 2e^x - 2^x + \ln x - 3\lg x$;

100. $y = 4e^{5x-1}$; **101.** $y = e^x + e^{-x}$;

102. $y = x^3\sin x + \sqrt{x}$; **103.** $y = \frac{1}{4}\sin^4 2x$;

104. $y = \frac{\ln x + x}{x}$; **105.** $y = x\cdot tgx + \ln\cos x + \frac{1}{\cos x}$;

106. $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}-\frac{3}{x^3}$; **107.** $y=\ln\cos 3x+\ln\frac{x^2}{1-x^2}$;

108. $y=3^x+x^2\operatorname{tg}x$; **109.** $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$;

110. $y=x^3\cdot 3^x$; **111.** $y=5\arccos 3x+3\arcsin 3x$;

112. $y=\sin(2x-1)\cdot e^{ax}$; **113.** $y=x(1-\ln x)$;

114. $y=\ln\frac{x}{a}-\ln\frac{a}{x}$; **115.** $y=\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}$.

▸ Решить задачи:

116. Падение тела описывается формулой $S=4{,}2t^2+\ln t-10t$. Определить скорость ускоренного тела через 2 с после начала падения.

117. Тело движется по закону $S=t^3-6t^2-4t-8$. Определить скорость тела в конце 5-й секунды.

118. Найти ускорение тела, движущегося по закону $S=0{,}5\sin 2t$, при $t=\frac{\pi}{4}$.

119. Тело массой $m=1$ *кг* движется по закону:

$$S=0{,}3\sin(10t-\pi).$$

Определить силу, действующую на тело при $t=\frac{\pi}{20}$.

120. Количество электричества, протекшее через проводник, начиная с момента $t=0$, определяется формулой $q=2t^2+3t+1$ (*Кл*). Найти силу тока в конце 10-й секунды.

121. Движение двух материальных точек задано уравнениями:

$$S=4t+8t^2-16t^3,$$

$$S=2t-4t^2+t^3.$$

Найти, в какой момент времени ускорение одинаково.

122. Маховик вращается по закону $\varphi=8t^2-6t+4$. Найти угловую скорость в момент времени $t=3$ с.

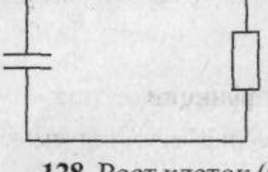
123. Закон изменения температуры тела T в зависимости от времени выражается формулой $T = 2{,}5t^2$. С какой скоростью нагревается тело в $t = 2$ c?

124. Концентрация (c) некоторого вещества в крови человека вследствие его выведения из организма изменяется с течением времени (t — в часах) по закону $c(t) = 2e^{-0{,}05t}$ (*мг/л*). Построить график зависимости концентрации от времени. Найти скорость изменения концентрации. Какой смысл имеет знак скорости? Рассчитать время, в течение которого концентрация уменьшается в e раз.

125. Концентрация раствора изменяется с течением времени по закону: $c = \dfrac{100t}{1+5t}$. Найти скорость растворения.

126. Зависимость между массой вещества M, получаемой в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением: $M = 5t^2 + 6t$. Найти скорость реакции.

127. Разряд конденсатора емкостью C и зарядом q через сопротивление R описывается уравнением $q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ (*Кл*). Найти скорость изменения заряда конденсатора с течением



времени t. Построить график этой зависимости. Какова величина этой скорости в начале разряда ($t = 0$)? Чему равна постоянная времени этого процесса?

128. Рост клеток (бактерий) в условиях ограниченности питательных веществ или пространства в течение начального интервала времени t происходит по экспоненте. Закон увеличения числа клеток имеет вид: $N = N_0 e^{kt}$, где N_0 — это число клеток в начальный момент времени $t = 0$; k — постоянная величина, зависящая от вида клеток, характера среды и т.п. Постройте график зависимости для k_1 и $k_2 > k_1$. Что характеризует величина k в процессе роста численности популяции с математической точки зрения?

129. Функции спроса D и предложения S от цены P имеют вид:

$$D = 9 - P,$$
$$S = 1 + P.$$

При равномерной цене эластичность спроса E_D и предложения E_S равна ...

При увеличении цены на 10% доход ... (увеличнтся, уменьшится) на ...%.

Доход I равен произведению цены товара P на величину спроса D. $I(P) = D(P) \cdot P$.

2.1.8. Дифференциал функции

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 — это главная часть приращения функции, линейная относительно приращения аргумента Δx. Обозначается $dy = y'\Delta x$. Дифференциал независимой переменной x равеи ее прнращению: $dx = \Delta x$.

Дифференциал функции $dy = y'dx$ или $dy = f'(x_0)dx$ равен ее производной, умноженной на дифференциал аргумента.

Дифференциал функции dy имеет четкий геометрический смысл (рис. 2.12): это приращение ординаты касательной к графику функции в точке x_0.

Свойства дифференциала функции

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — некоторые дифференцируемые функции, c — вещественное число.

1. $dc = 0$.
2. $d(u + v) = du + dv$.
3. $d(cu) = cdu$.
4. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.
5. $d(uv) = vdu + udv$.
6. $df(u) = f'(u)du$, где $u = \varphi(x)$.

◆ Пример 2.62

Найти дифференциал функции $y = 3x + x^2$ в точке $x = 2$.

Решение:

$$dy = y'dx.$$

Вычислим производную функции: $y' = 3 + 2x$.

Подсчитаем ее значение в точке $x = 2$: $y'_{x=2} = 3 + 2 \cdot 2 = 7$.

$dy = 7dx$.

Ответ: $dy_{x=2} = 7dx$.

◆ Пример 2.63

Найти дифференциал функции: $y = x^3 - 3^x$.

Решение:

Находим производную функции и умножаем ее на дифференциал независимой переменной.

$dy = y'dx = (x^3 - 3^x)'dx = (3x^2 - 3^x \ln 3)dx$.

Задания для самостоятельного решения

▸ Найти дифференциал функции:

130. $y = \ln(\sin\sqrt{x})$;

131. $y = \arcsin\frac{1}{x}$;

132. $y = \ln\sqrt{1 - 2x^2}$;

133. $y = e^x + x + 1$;

134. $y = \frac{1}{3}tg^3 3x + tg3x + 3$;

135. $y = \frac{2x - 4}{4x + 3}$;

136. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$;

137. $y = \ln^2 x$;

138. $y = (\arcsin x)^2$.

Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Эти приближенные вычисления основаны на приближенной замене приращения функции Δy в данной точке на ее дифференциал dy:

$$\Delta y \approx dy.$$

При $\Delta x \to 0$ абсолютная погрешность от такой замены (рис. 2.10) является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с Δx:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$
$$dy = f'(x_0)dx.$$

Объединяя эти две формулы, получим:

$$\begin{gathered} f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy, \\ f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Это основная формула в приближенных вычислениях.

◆ Пример 2.64

Вычислить приближенное значение $\sqrt{1{,}07}$.

Решение:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}};\ \Delta x = 0{,}07;$$

$$\sqrt{1{,}07} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot 0{,}07 = 1 + 0{,}035 = 1{,}035.$$

◆ Пример 2.65

Ребро куба $a = 2$ *м*. Объем куба $V = a^3$ равен 8 *м*^{3}. Ребро увеличили на $\Delta a = 1$ *см*. Приближенно оценить увеличение объема куба dV, а также абсолютную и относительную погрешности этого приближения по сравнению с точным решением ΔV.

Решение:

$$V = a^3$$
$$\Delta V = V' - V = (a + \Delta a)^3 - a^3$$
$$\Delta V = (2{,}01)^3 - 8 = 0{,}120601\ (м^3)$$

Приближенно ΔV можно рассчитать так:

$$\Delta V \approx dV = (a^3)' = 3a^2\Delta a$$
$$dV = 3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}01 = 0{,}12\ (м^3)$$

Абсолютная погрешность:

$$|\Delta V - dV| = 0{,}120601 - 0{,}12 = 0{,}000601 \ (м^3).$$

Относительная погрешность:

$$\frac{\Delta V - dV}{\Delta V} \cdot 100\% = \frac{0{,}000601}{0{,}120601} = 0{,}5\%.$$

2.1.9. Функции нескольких переменных

Координатная плоскость — это множество всех упорядоченных пар вещественных чисел (x, y); каждая точка на ней характеризуется парой своих координат: $M(x, y)$.

Величина u называется функцией переменных величин x, y, z, если каждой рассматриваемой совокупности этих величин соответствует одно определенное значение величины u: $u = f(x, y, z)$.

Частные производные первого порядка

Частная производная функции $u = f(x, y)$ нескольких переменных по аргументу x — это предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при условии, что последнее приращение стремится к нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Приращение получает только один аргумент x. Остальные аргументы фиксируются. Обозначается частная производная u'_x или $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Таким образом, частная производная функции $u = f(x, y)$ по x — это обыкновенная производная функции одной переменной x при фиксированном значении переменной y.

Аналогично определяются частные производные функции трех и более переменных.

Частный дифференциал функции — это произведение частной производной по одной из независимых переменных на дифференциал этой переменной.

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} dx\,; \quad d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} dy\,; \quad d_z u = \frac{\partial u}{\partial z} dz\,.$$

Полный дифференциал du функции u — это сумма частных дифференциалов функции $u = f(x, y, z)$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz\,.$$

◆ Пример 2.66

Найти частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $u = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{x-y}$.

Решение:

Находим частную производную u'_x, считая $y = const$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x = \left(\operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y}\right)'_x = \frac{\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)'}{1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2} = \frac{\dfrac{(x)'(x-y)-x'(x+y)}{(x-y)^2}}{1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2} =$$

$$= -\frac{2y}{2x^2+2y^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Считая $x = const$, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u'_y = \left(arctg\frac{x+y}{x-y}\right)'_y = \frac{\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)'}{1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2} =$$

$$= \frac{2y}{2x^2+2y^2} = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Полный дифференциал равен:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = -\frac{ydx}{x^2 + y^2} + \frac{xdy}{x^2 + y^2} =$$

$$= \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Градиент функции

Градиент функции $u = f(x, y, z)$ — это вектор, координаты которого равны соответственно частным производным $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ в точке $M(x, y, z)$.

Обозначение градиента функции:

$$\operatorname{grad} u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}.$$

Градиент функции характеризует направление и величину максимальной скорости возрастания этой функции в данной точке.

Частные производные высших порядков

Частные производные первого порядка от функции двух и более переменных также представляют собой функции нескольких переменных и их также можно продифференцировать.

Для функции двух переменных $u = f(x, y)$ возможны четыре вида частных производных второго порядка.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right); \ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right); \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Смешанные производные — это частные производные, в которых дифференцирование производится по разным переменным.

Задания для самостоятельного решения

Найти частные производные от функции и полный дифференциал функции.

139. $u = x^2 + 5y$; **140.** $u = \dfrac{x + y^2}{z}$;

141. $u = 4\sin(x + y)$; **142.** $u = 3(x^2 + 4y)^2$;

143. $u = 8e^{xy}$; **144.** $u = \ln\dfrac{x}{y}$;

145. $u = ye^x$; **146.** $u = \sqrt{x^2 + y - z}$.

2.1.10. Применение производных в исследовании функций

Раскрытие неопределенностей

Правило Лопиталя (Теорема Лопиталя)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 за исключением, быть может, самой точки x_0. Кроме того, пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, причем $g'(x) \neq 0$ в указанной окрестности точки x_0. Тогда если существует предел отношения $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем справедлива формула:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- Эта теорема верна и если $x \to \pm\infty$.
- Правило Лопиталя можно применять повторно, если $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и исходные функции $f(x)$ и $g(x)$.

◆ **Пример 2.67**

Вычислить предел. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{2x^2}$ равен ...

Варианты ответов: 1) 0; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 1.

Решение:

Здесь неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя последовательно два раза, так как эта неопределенность имеет место дважды.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{4} = \frac{1}{4}.$$

◆ **Пример 2.68**

Вычислить предел. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - x^2 - 4}{3x^4 - 5x^3 - 4x}$ равен ...

Варианты ответов: 1) 0; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 1.

Решение:

Здесь неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя и найдем $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - x^2 - 4}{3x^4 - 5x^3 - 4x} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 2x}{12x^3 - 15x^2 - 4} =$$

$$= \frac{3 \cdot 4 - 2 \cdot 2}{12 \cdot 8 - 15 \cdot 4 - 4} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

◆ **Пример 2.69**

Вычислить предел. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ равен ...

Варианты ответов: 1) 0; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) 2.

Решение:

Это неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1}=2.$$

◆ Пример 2.70

Вычислить предел. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\sin x}$ равен …

Варианты ответов: 1) $-\frac{1}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 2.

Решение:

Имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя два раза последовательно.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2\cos x-x\sin x}=$$
$$=-\frac{1}{2}.$$

‣ Если имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, то правило Лопиталя остается справедливым при замене условия $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ на условие

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=\infty.$$

◆ Пример 2.71

Вычислить предел. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$ равен …

Варианты ответов: 1) 8; 2) ∞; 3) 0; 4) 1:

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

◆ Пример 2.72

Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2}$.

Решение:

Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

◆ Пример 2.73

Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\pi \sin^{-2}\pi x} = -\frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1} \frac{\sin^2 \pi x}{x-1} =$$

$$= -\lim_{x\to 1} \frac{\sin 2\pi x}{1} = 0.$$

▸ Неопределенности вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ можно свести к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

◆ Пример 2.74

Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$.

Решение:

Имеет место неопределенность вида $0\cdot\infty$

Преобразуем функцию $x\ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$.

Это неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0.$$

◆ Пример 2.75

Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

Решение:

Это неопределенность вида 0^0. Используя формулу $x^x = e^{x\ln x}$ и с учетом примера 2.74, получим:

$$\lim_{x\to 0} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\ln x} = e^0 = 1.$$

Задания для самостоятельного решения

Найти пределы, используя правило Лопиталя.

147. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^6-6x+5}{x-1}$;

148. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$;

149. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$;

150. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$;

151. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$;

152. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$;

153. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$;

154. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}$;

155. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}$;

156. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$;

157. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$;

158. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Формула Тейлора. Формула Маклорена

Этот материал подробно изложен в разделе «Ряды», но здесь он служит иллюстрацией основного принципа математики: представлять сложное через более простое.

Если функция дифференцируема достаточное число раз в точке $x = x_0$, то ее можно представить в виде *многочлена* некоторой степени для функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$. А многочлен — это простая элементарная функция, над которой несложно проводить любые арифметические операции.

Функцию $f(x)$в точке $x = x_0$, имеющую $(n + 1)$ производную, можно представить по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x). \qquad (2.5)$$

где $R_n(x)$ — остаточный член n-го порядка, а слагаемые перед остаточным членом называются *многочленом Тейлора*.

Если $x_0 = 0$, то функцию $y = f(x)$ в точке $x = 0$, имеющую $(n + 1)$ производную, можно представить по формуле Маклорена:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x). \qquad (2.6)$$

Эта формула широко используется в приближенных вычислениях значений различных функций, так как коэффициенты этого многочлена вычисляются достаточно просто. Погрешность этого приближения можно оценить по остаточному члену $R_n(x)$.

Рассмотрим примеры разложения функций по формуле Маклорена.

Формула Маклорена для основных элементарных функций

1. $f(x)=e^x$.

Решение: $(e^x)^{(n)}=e^x$, и $f^{(n)}(0)=e^0=1$, то для любого n формула Маклорена для $f(x)=e^x$ имеет вид:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots . \qquad (2.6а)$$

Ее используют для вычисления числа e с любой необходимой точностью. Так при $x=1$ получим $e\approx 2{,}7182808$.

2. $f(x)=\sin x$.

Решение: $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$, следовательно,

$$f^{(n)}(0)=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, \text{ при четном } n,\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \text{ при нечетном } n.\end{cases}$$

Формула Маклорена для функции $f(x)=\sin x$ имеет вид:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\pm\ldots,$$

или ряд Маклорена для функции $\sin x$ можно записать так:

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3. $f(x)=\cos x$.

Решение: $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$

$$f^{(n)}(0)=\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, \text{ при нечетном } n,\\ (-1)^{\frac{n}{2}}, \text{ при четном } n.\end{cases}$$

Формула Маклорена для функции $f(x)=\cos x$ имеет вид:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\pm\ldots$$

4. $f(x)=\ln(1+x)$.

Решение: $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$, то $f(0)=0$.

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)! \qquad (0!=1).$$

Формула Маклорена для функции $f(x)=\ln(1+x)$ имеет вид:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\pm\ldots$$

5. $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, где α — вещественное число.

Решение: $f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$.

Для $f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$ формула Маклорена для функции $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ имеет вид:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

Если α — целое число, равное n, то эта формула переходит в формулу бинома Ньютона:

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots$$

◆ Пример 2.76

Разложить по формуле Маклорена $f(x)=e^{2x}$.

Решение:

В формуле Маклорена для функции $f(x)=e^x$ (2.6а) заменим x на $2x$.

Получим $e^{2x}=1+\dfrac{2x}{1!}+\dfrac{4x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{(2x)^n}{n!}+\ldots$

Иначе $e^{2x}=1+2x+2x^2+\ldots+\dfrac{2^n x^n}{n!}+\ldots$

◆ Пример 2.77

Разложить в ряд Маклорена $f(x)=\sin x^2$.

Решение:

В формуле Маклорена для функции $f(x)=\sin x$ заменим x на x^2. Получим:

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \ldots$$

◆ Пример 2.78

Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

Решение:

Применим формулу Маклорена для функции $f(x)=\sin x$, используя два первых члена разложения. Для числителя этого выражения:

$$\sin x - x = x - \frac{x^3}{3!} - x = -\frac{x^3}{3!}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3!}\right) = -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} = -\frac{1}{6}.$$

◆ Пример 2.79

Найти многочлен Тейлора третьей степени для функции $f(x)=x^{10}-5x^4+1$ в окрестности точки $x=1$.

Решение:

Запишем многочлен Тейлора третьей степени, используя формулу (2.5):

$$P_4(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

Найдем значение функции и значения первых трех производных в точке $x=1$.

$f(1)=1^{10}-5\cdot 1^4+1=-3;$

$f'(x)=10x^9-5\cdot 4x^3=10x^9-20x^3;$

$f'(1)=10\cdot 1-20\cdot 1=-10;$

$$f''(x) = 90x^8 - 60x^2; \qquad f''(1) = 90 - 60 = 30;$$
$$f'''(x) = 720x^7 - 120x; \qquad f'''(1) = 720 - 120 = 600.$$

Подставим найденные значения в формулу:

$$P_4(x) = -3 + \frac{-10}{1!}(x-1) + \frac{30}{2!}(x-1)^2 + \frac{600}{3!}(x-1)^3,$$
$$P_4(x) = -3 - 10(x-1) + 15(x-1)^2 + 100(x-1)^3.$$

Задания для самостоятельного решения

- Разложить по формуле Маклорена функции:

159. $f(x) = e^{x^2-1}$;

160. $f(x) = \cos(2x-1)$;

161. $f(x) = \ln(e+x)$;

162. $f(x) = \operatorname{tg} x$ до члена с x^3 включительно;

163. $f(x) = e^{-x}$ до члена с x^2 включительно.

- Найти пределы с использованием разложений по формуле Маклорена:

164. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$; **165.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$;

166. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$; **167.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$.

Исследование функций и построение графиков. Экстремумы

Возрастание и убывание функции на отдельном интервале является существенной характеристикой поведения функции.

Теорема. *Если функция $f(x)$ дифференцируема и на интервале (a, b) производная данной функции $f'(x) > 0$ положительна, то функция возрастает на этом интервале.*

Если производная отрицательна $f'(x) < 0$, то на этом интервале функция убывает.

- Точка x_0 называется точкой *локального максимума* (или просто *максимума*) функции $y = f(x)$, если для любого $x \neq x_0$ в некоторой окрестности точки x_0 верно неравенство $f(x_0) > f(x)$ (рис. 2.13а).
- *Локальный минимум функции* — это точка, если для любого $x \neq x_0$ в некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство $f(x_0) < f(x)$ (рис. 2.13б).

Точки локального экстремума (или просто *экстремума*) — это точки максимума и минимума.

Экстремум — значение функции в этих точках.

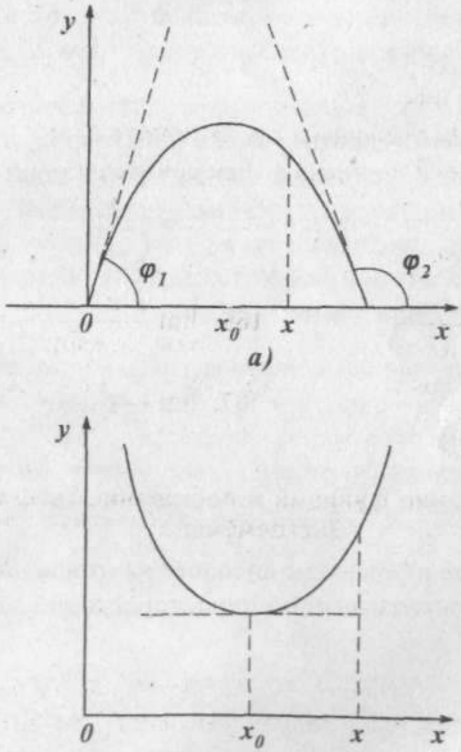


Рис. 2.13. Точки экстремума

Связь знака производной и характера ее изменения, изложенная в вышеуказанной теореме, очевидна (рис. 2.13а). *Геометрический смысл производной:* $y'(x) = \text{tg}\,\varphi$. Если функция возрастает, т.е. угол наклона касательной к графику функции — острый $\text{tg}\,\varphi > 0$, а если функция убывает, то $\text{tg}\,\varphi < 0$ и угол наклона касательной тупой.

Теорема (необходимое условие существования экстремума). *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум, то $f'(x) = 0$.*

Такие точки называются *точками возможного экстремума*, или *точками, подозрительными на экстремум*. В таких точках касательные параллельны оси $0x$ (рис. 2.13б).

Следует обратить внимание на термин «возможного экстремума». Иными словами, если в этой точке x_0 производная равна нулю $f'(x) = 0$, то она может и не быть точкой экстремума. Например, для кубической параболы $f(x) = x^3$ (рис. 2.13а) производная в точке $x = 0$ $f'(x) = 3x^2$ $f'(0) = 0$, но это не точка экстремума. Условие $f'(x) = 0$ только необходимое, но не достаточное.

Теорема (первое достаточное условие существования экстремума). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна в самой точке x_0. Если при переходе через точку x_0 слева направо производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум.*

Если же при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то точка x_0 является точкой минимума.

Если же $f'(x)$ не меняет знак в окрестности точки x_0, то данная функция не имеет локального экстремума в точке x_0.

Теорема (второе достаточное условие существования экстремума). *Если в точке x_0 первая производная функции $y = f(x)$ равна нулю $f'(x) = 0$, а вторая производная отлична* *от нуля $f''(x) \neq 0$, то x_0 — точка экстремума. Причем:*

- *x_0 — точка минимума, если $f''(x) > 0$;*
- *x_0 — точка максимума, если $f''(x) < 0$.*

◆ Пример 2.80

Найти интервал возрастания и убывания (монотонности) функции $f(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 18x$ и точки экстремума.

Решение:

Данная функция определена при всех $x \in R$. Найдем производную: $f'(x) = 3x^2 - 15x + 18$.

Приравняем ее к нулю:

$$3x^2 - 15x + 18 = 0.$$

Решаем квадратное уравнение и находим две точки возможного экстремума:

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 3.$$

Использовали необходимое условие существования экстремума. Теперь достаточное условие: $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку $x_1 = 2$. Это означает, что в этой точке $x_1 = 2$ — максимум.

В точке $x_2 = 3$ — минимум, так как знак меняется с минуса на плюс.

Интервал монотонности данной функции:

- при $x \in (-\infty, 2)$ $f'(x) > 0$ — функция монотонно возрастает;
- при $x \in (2, 3)$ $f'(x) < 0$ — функция монотонно убывает;
- при $x \in (3, \infty)$ $f'(x) > 0$ — функция монотонно возрастает.

◆ Пример 2.81

Найти экстремум функции $f(x) = (x-2)e^x$.

Решение:

Функция определена при всех $x \in R$.

$$f'(x) = (x-2)'e^x + (x-2)(e^x)' = e^x + xe^x - 2e^x =$$

$$= xe^x - e^x = e^x(x-1).$$

Приравняем ее к нулю. Точка $x=1$ — точка возможного экстремума. Для исследования этой точки применим теорему о второй производной: $f''(x)=xe^x$ и в точке $x=1$ $f''(x)>0$ ($f''(x)=e$). Следовательно, точка $x=1$ — точка минимума и значение функции в этой точке $f(1)=-e$.

◆ Пример 2.82

Найти наименьшее и наибольшее значение функции $f(x)=x^3-2x^2+x-2$ на отрезке [0,5; 2].

Решение:

Найдем точки возможного экстремума функции:

$$f'(x)=3x^2-4x+1=0 \Rightarrow x_1=\frac{1}{3},\ x_2=1.$$

Но точка $x_1=\frac{1}{3}$ не принадлежит отрезку [0,5; 2].

Рассчитаем значения функции в точках концов отрезка [0,5; 2] и в точке экстремума.

$$x=0{,}5 \qquad x=1 \qquad x=2$$

$$f(0{,}5)=-\frac{15}{8}=-1\frac{7}{8}, \qquad f(1)=-2, \qquad f(2)=0.$$

Наибольшего значения на отрезке [0,5; 2] функция достигает в точке $x=2$, и оно равно 0.

Наименьшее значение функции в точке $x=1$, и оно равно –2.

◆ Пример 2.83

Найти оптимальные размеры консервной банки, имеющей форму цилиндра радиуса R и высотой H заданного объема V, при котором поверхность сосуда будет минимальной, а, следовательно, и затраты материала на ее изготовление также минимальны.

Решение:

Полная поверхность цилиндра вычисляется по формуле:

$$S=2\pi RH+2\pi R^2.$$

Найдем H из заданного объема V:

$$V = \pi R^2 H \Rightarrow H = \frac{V}{\pi R^2}$$

и подставим в формулу поверхности цилиндра:

$$S = 2\pi R \frac{V}{\pi R^2} + 2\pi R^2,$$

$$S = 2\pi\left(\frac{V}{\pi R} + R^2\right).$$

Найдем минимум этой функции $S(R)$, приравнивая $S'(R) = 0$.

$2R - \dfrac{V}{\pi R^2} = 0 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ и $H = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$ — это оптимальные размеры банки.

Условия выпуклости и точки перегиба графика функции

- График функции $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) *выпуклость, направленную вниз*, если он расположен не ниже любых касательных, проведенных к графику функции (рис. 2.14).

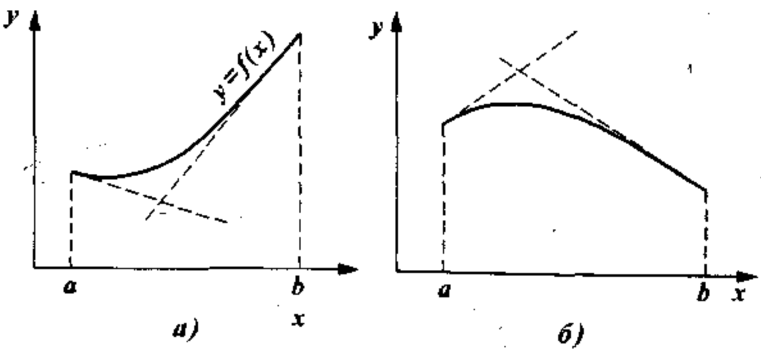


Рис. 2.14. Выпуклость графика функции

Выпуклость, направленная вверх, будет, если график функции $y = f(x)$ на этом интервале расположен не выше любых касательных (рис. 2.14б).

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) вторую производную и она положительна $f''(x) \geq 0$, то функция выпукла вниз на этом интервале. Если же $f''(x) < 0$, на интервале (a, b), то она выпукла вверх на этом интервале.*

- *Точка перегиба* графика непрерывной функции $y = f(x)$ — это точка, при переходе через которую функция меняет направление выпуклости.

Геометрическая интерпретация: в точке перегиба касательная пересекает график функции, так как он переходит с одной стороны касательной на другую, «перегибаясь» через нее (рис. 2.15).

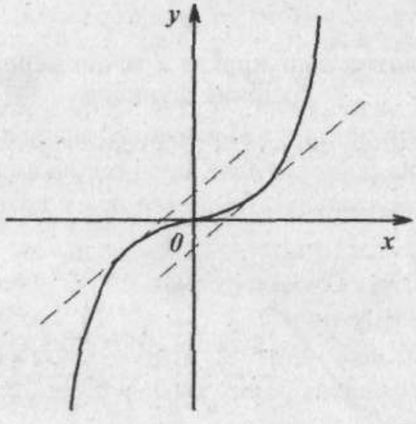


Рис. 2.15. *График функции $y = x^3$*

Точка $x = 0$ — точка перегиба кубической параболы

Теорема (Необходимое условие существования точки перегиба). *Если $x = x_0$ является точкой перегиба функции $y = f(x)$, то вторая производная, если она существует, должна обратиться в нуль: $f''(x_0) = 0$.*

Критические точки — это точки графика, для которых $f''(x_0) = 0$.

***Теорема (достаточное условие существования точки перегиба)**. Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в окрестности точки x_0. Эта точка x_0 является точкой перегиба функции, если при переходе через нее вторая производная $f''(x)$ меняет знак.*

◆ Пример 2.84

Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 3x - 1.$$

Решение:

Найдем $f''(x) = (4x^3 - 12x + 3)' = 12x^2 - 12$,

$$f''(x) = 12(x^2 - 1).$$

- На интервале $(-\infty, -1)$ $f''(x) > 0$, следовательно, функция $f(x)$ выпукла вниз на этом интервале.
- На интервале $(1, \infty)$ $f''(x) > 0$, следовательно, и на этом интервале функция $f(x)$ выпукла вниз.
- На интервале $(-1, 1)$ $f''(x) < 0$ и, следовательно, функция $f(x)$ выпукла вверх.
- Рассмотрим точку $x = -1$. При переходе через нее $f''(x)$ меняет знак. Следовательно, $x = -1$ — это точка перегиба данной функции.
- Рассмотрим точку $x = 1$. Вторая производная $f''(x)$ также меняет знак. Точка $x = 1$ — точка перегиба данной функции.

Асимптоты графика функции

Асимптоты — это прямые, к которым неограниченно приближается график функции.

Различают 3 вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

- *Вертикальная асимптота* графика функции $y = f(x)$ — это прямая $x = a$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ равно, или $+\infty$, или $-\infty$.

Обычно эти асимптоты сопровождают точки разрыва 2-го рода. И если функция непрерывна, то вертикальных асимптот нет.

- *Наклонная асимптота* графика функции $y = f(x)$ — это прямая $y = kx + b$ при $x \to \pm\infty$, если $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ (*), где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.
- В случае *горизонтальной асимптоты* $k = 0$.

Для нахождения коэффициентов k и b в уравнении разделим обе части равенства (*) на x и перейдем к пределу при $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right] = k \text{ или}$$

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Найдем b из (*):

$$\lim_{x\to\infty}(b + \alpha(x)) = b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx].$$

◆ Пример 2.85

Найти асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x+1}$.

Решение:

$x = -1$ — точка разрыва 2-го рода

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to -1+} f(x) = -\infty.$$

Это вертикальная асимптота: $x = -1$.

Составим уравнение наклонной асимптоты.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2 - 8}{x^2 + x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2 - \dfrac{8}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x}} = 2.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x-8}{x+1}-2x\right] = -\lim_{x\to\infty}\frac{2x-8}{x+1} = -2.$$

Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = 2x - 2$.

Схема исследования графика функции

1. Найти область определения функции (ООФ).

2. Определить возможный тип симметрии функции (четность, нечетность).

Напомним, что *четная функция* симметрична относительно оси $0y$.

$f(-x) = f(x)$ — условие симметрии относительно $0y$.

Нечетная функция симметрична относительно начала координат.

$f(-x) = -f(x)$ — условие такой симметрии.

3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат, т.е. решить уравнения $x = 0$ и $y = 0$. Найти точки разрыва.

4. Найти точки возможного экстремума ($y'(x) = 0$).

5. Найти критические точки ($y''(x) = 0$).

6. Исследовать знаки первой и второй производных, определить участки монотонности функции, направление выпуклости графика, точки экстремума и перегиба.

7. Определить максимум и минимум функции на области ее определения. Если ООФ является отрезок $[a, b]$, то необходимо вычислить значения функции в его точках и сопоставить их с локальными экстремумами.

8. Найти асимптоты.

9. Построить график функции.

◆ Пример 2.86

Исследовать функцию $y = x^3 - 3x$ и построить ее график.

Решение:

1. ООФ: $x \in R$.

2. Функция нечетная, так как $f(-x) = -x^3 - 3(-x) = -(x^3 - 3x) = -f(x)$. Следовательно, она симметрична относительно начала координат.

Функция непериодическая.

3. Функция непрерывна и точек разрыва нет.

Точки пересечения графика с осью $0x$:

Пусть $y = 0$ $x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}$; $x_2 = 0$; $x_3 = \sqrt{3}$.

В этих трех точках график пересекает ось $0x$:

$$(-\sqrt{3}, 0); \qquad (0, 0); \qquad (\sqrt{3}, 0).$$

4. Найдем точки возможного экстремума:

$$y' = 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_4 = -1,\ x_5 = 1.$$

5. Найдем $y'' = 6x$ $6x = 0 \Rightarrow x = 0$.

6. В точке $x_4 = -1$ — будет максимум функции, так как $y'' = 6(-1) < 0$.

В точке $x_5 = 1$ — минимум функции, так как $y'' = 6 \cdot 1 > 0$.

На интервале $(-\infty, -1)$ $y' > 0$ — функция возрастает.

На интервале $(1, \infty)$ $y' > 0$ — функция возрастает.

На интервале $(-1, 1)$ $y' < 0$ — функция убывает.

При переходе через точку $x = 0$ вторая производная меняет знак: $(-\infty, 0)$ $y'' < 0$, функция выпукла вверх, а на $(0, \infty)$ $y'' > 0$ функция выпукла вниз. Следовательно, $x = 0$ — точка перегиба.

7. $y_{\max} = f(-1) = 2$; $y_{\min} = f(1) = -2$ — значения функции в точках экстремума.

8. Вертикальных асимптот нет, так как функция непрерывна.

Наклонных асимптот также нет, так как

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 3x}{x} = \infty$$

9. Построим график функции (рис. 2.16):

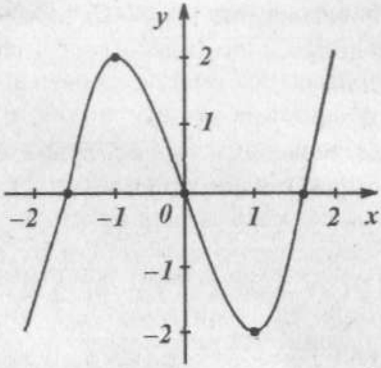


Рис. 2.16. График функции $y = x^3 - 3x$

◆ Пример 2.87

Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ и построить ее график.

Решение:

1. ООФ: $x \neq 0$ или $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

2. Функция нечетна, так как

$$f(-x) = \frac{x^2 - 1}{-x} = -f(x).$$

Следовательно, она симметрична относительно начала координат.

Функция непериодическая.

3. Точки пересечения с осью $0x$: решая уравнение $y = 0$, получаем $x = \pm 1$. Точек пересечения с осью $0y$ нет, так как $x \neq 0$ (ООФ).

4. Точки возможного экстремума: производная нигде не равна нулю

$$y' = \frac{x^2 + 1}{x^2} \neq 0,$$

Следовательно, точек возможного экстремума нет.

В области определения функции $y' > 0$.

5. $y'' = -\dfrac{2}{x^3}$ — критических точек нет.

6. Функция монотонно возрастает в области определения, так как $y'(x) > 0$.

В правой координатной полуплоскости выпуклость графика функции направлена вверх, так как $y''(x) < 0$. В левой — вниз ($y''(x) > 0$).

7. Нет наибольшего и наименьшего значений функции, так как область ее значений неограниченна.

8. Вертикальная асимптота — это ось $0y$, поэтому что

$$\lim_{x\to 0-} f(x) \to \infty \qquad \lim_{x\to 0+} f(x) \to -\infty.$$

Уравнение наклонной асимптоты:

$$y = kx + b.$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = 1, \quad k = 1.$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2-1}{x} - x \right] = \lim_{x\to\infty} = -\frac{1}{x} = 0.$$

Уравнение наклонной асимптоты $y = x$.

9. Построим график функции (рис. 2.17):

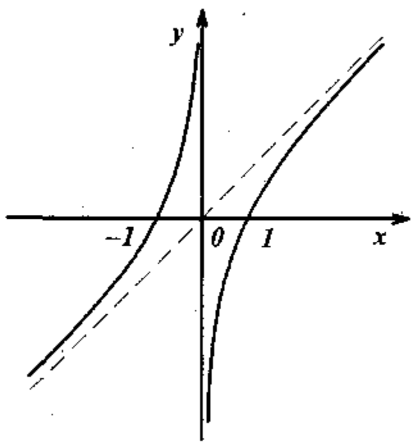


Рис. 2.17. *График функции* $y = \dfrac{x^2-1}{x}$

Задания для самостоятельного решения

- Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графиков функции:

168. $f(x)=x^3-6x^2+x$; **169.** $f(x)=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$;

170. $f(x)=x^3-6x^2+x$; **171.** $f(x)=x^3-6x^2+x$;

172. $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

- Найти асимптоты графика функции:

173. $y=\dfrac{1}{x}$; **174.** $y=\dfrac{x^2+3x-2}{x-1}$;

175. $y=\dfrac{|x|^3}{x^2-2x+5}$; **176.** $y=\dfrac{3x-1}{x}$;

177. $y=\ln(x-2)$; **178.** $y=\dfrac{5}{x^2-1}$.

- Исследовать и построить графики функций:

179. $y=x^3-12x+5$; **180.** $y=x^4-10x^2+10$;

181. $y=\dfrac{x}{x+2}$; **182.** $y=x^2e^{-x}$;

183. $y=x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2}$; **184.** $y=x^2\ln x$;

185. $y=x^2-2\ln x$; **186.** $y=\dfrac{2x^2-3x}{x-2}$.

2.1.11. Неопределенный интеграл

Понятие первообразной функции

Это понятие возникает из следующей задачи математического анализа: по данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, производная которой равна функции $f(x)$.

- *Первообразная функция* для функции $y=f(x)$ называется такая функция $F(x)$, что имеет место равенство

$$F'(x)=f(x).$$

Например: функция $F(x)=\sin x$ является первообразной для функции $f(x)=\cos x$ на бесконечном промежутке $(-\infty, \infty)$, так как для любых x справедливо $(\sin x)'=\cos x$.

- Две первообразные одной функции отличаются друг от друга на постоянную. Другими словами, если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то и функция $F(x)+C$, где C — произвольное постоянное число, также первообразная для функции $f(x)$, потому что $(F(x)+C)'=f(x)$.

Неопределенный интеграл

Неопределенный интеграл функции $y=f(x)$ — это совокупность всех первообразных функций $F(x)+C$ для функции $f(x)$.

Обозначается символом

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

где $\int$ — *знак интеграла* (это стилизованная латинская буква S, означающая суммирование; $f(x)$ — *подынтегральная функция*; $f(x)\,dx$ — *подынтегральное выражение*; C — *постоянная интегрирования*, способная принимать любое значение; x — переменная интегрирования.

Интегрирование — это отыскание первообразной по ее производной. Это действие, обратное дифференцированию.

Геометрический смысл неопределенного интеграла: это семейство кривых, зависящих от одного параметра C, которые получаются путем параллельного сдвига вдоль оси Oy. (рис. 2.21).

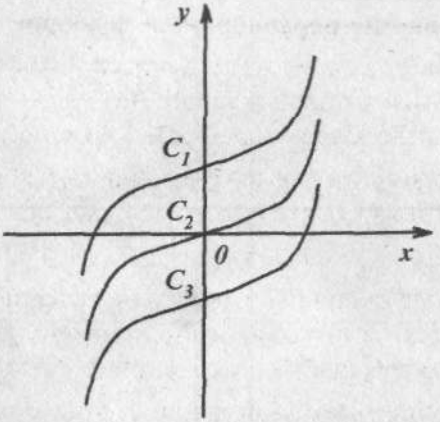


Рис. 2.18. *Кубическая парабола* $y = \int 3x^2 + dx = x^3 + C$

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x) + C$.

2. $\int df(x) = f(x) + C$.

3. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$ — постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

4. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ — интеграл суммы равен сумме интегралов.

Основные способы интегрирования

1. *Метод непосредственного интегрирования,* который заключается в использовании основных свойств неопределенного интеграла и приведении подынтегрального выражения к табличному виду.

Таблица 2

Таблица основных формул интегрирования

1	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$	10	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$, $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
2	$\int dx = x + C$	11	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$, $x \neq n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$, $x \neq 0$	12	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$, $-1 < x < 1$
4	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $0 < a \neq 1$	13	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{cases}$
5	$\int e^x dx = e^x + C$	14	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
6	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	15	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$, $a > 0$
7	$\int \cos x dx = \sin x + C$	16	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$, $\lvert x\rvert \neq 1;\ a \neq 0$
8	$\int tgx dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	17	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a}) + C$, $\lvert x\rvert > a$ *при* $a < 0$
9	$\int ctgx dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$		

◆ **Пример 2.88**

Найти неопределенный интеграл $\int\left(\frac{3}{x}+2\sin x\right)dx$.

Решение:

Используя свойство неопределенного интеграла: а) интеграл от суммы равен сумме интегралов и б) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, получаем:

$$\int\left(\frac{3}{x}+2\sin x\right)dx=3\int\frac{dx}{x}+2\int\sin xdx.$$

Используя формулы (3 и 6) из таблицы 2, получаем:

$$\int\left(\frac{3}{x}+2\sin x\right)dx=3\int\frac{dx}{x}+2\int\sin xdx=3\ln|x|-2\cos x+C.$$

◆ **Пример 2.89**

Найти неопределенный интеграл $\int\frac{x^4-5x^3+1}{x}dx$.

Решение:

Почленно разделим на x:

$$\int\frac{x^4-5x^3+1}{x}dx=\int x^3-5\int x^2+\int\frac{dx}{x}=\frac{x^4}{4}-5\frac{x^3}{3}+\ln|x|+C.$$

2. *Метод подстановки или метод введения новой переменной, или метод замены переменной.*

Это самый эффективный прием сведения неопределенного интеграла к табличному виду.

◆ **Пример 2.90**

Найти неопределенный интеграл $\int\frac{x^2}{(x+1)^3}dx$.

Решение:

Положим $x+1=t$, тогда

$x=t-1;\ x^2=(t-1)^2;\ (x+1)^3=t^3.$

Продифференцировав $x+1=t$, получим $dx=dt$.

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^3}dx = \begin{vmatrix} x+1=t \\ x=t-1 \\ x^2=(t-1)^2 \\ dx=dt \end{vmatrix} \int \frac{(t-1)^2}{t^3}dt = \int \frac{t^2-2t+1}{t^3}dt =$$

$$= \int \frac{t^2-2t+1}{t^3}dt = \int \frac{dt}{t} - 2\int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{t^3} = \int \frac{dt}{t} - 2\int t^{-2}dt + \int t^{-3}dt =$$

$$= \ln|t| - 2\frac{t^{-1}}{-1} + \frac{t^{-2}}{-2} + C = \ln|t| + \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + C =$$

$$= \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C.$$

Правило: интеграл от нечетной степени синуса или косинуса находим путем отделения одного множителя, затем, используя формулу $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, разбиваем на два интеграла, и далее проводим замену переменных.

◆ Пример 2.91

Найти неопределенный интеграл $\int \sin^3 x dx$.

Решение:

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin x \cdot \sin^2 x dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)dx =$$

$$= \int \sin x dx - \int \cos^2 x \cdot \sin x dx = \int \sin x dx + \int t^2 dt =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{vmatrix} = -\cos x + \frac{t^3}{3} + C.$$

Правило: интеграл от четной степени синуса или косинуса можно найти путем понижения степени вдвое по формулам половинных углов:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x);$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

◆ Пример 2.92

Найти неопределенный интеграл $\int \sin^2 x dx$.

Решение:

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx =$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

◆ Пример 2.93

Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{25+x^2}$.

Решение:

Применяя формулу (14) из таблицы 2, получим:

$$\int \frac{dx}{25+x^2} = \frac{1}{5} arctg \frac{x}{5} + C.$$

◆ Пример 2.94

Найти неопределенный интеграл $\int \frac{7dx}{\sqrt{3-5x^2}}$.

Решение:

Применяя формулу (15) из таблицы 2, получим:

$$\int \frac{7dx}{\sqrt{3-5x^2}} = \frac{7}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{5}{3}x^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}x + C.$$

Интегрирование по частям

Теорема. *Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ определены и непрерывно дифференцируемые функции, то справедлива формула интегрирования по частям:*

$$\int u dv = uv - \int v du. \qquad (2.7)$$

Самое трудное в интегрировании по частям — это выбрать сомножитель dv в подынтегральном выражении: интеграл в правой части формулы (2.7) $\int v du$ должен быть проще исходного.

Чаще всего формула (2.7) применяется к интегралам вида

$$\int P(x)e^{\alpha x} dx, \quad \int P(x)\sin \alpha x dx, \quad \int P(x)\cos \alpha x dx, \qquad (2.8)$$

где $P(x)$ — многочлен, $\alpha \neq 0$.

В этих интегралах $u = P(x)$; $dv = e^{\alpha x} dx$; $dv = \sin \alpha x dx$; $dv = \cos \alpha x dx$ или к интегралам вида:

$$\int R(x)\ln x dx, \quad \int R(x)\operatorname{arctg} \alpha x dx, \quad \int R(x)\operatorname{arcctg} \alpha x dx, \qquad (2.9)$$

где $R(x)$ — рациональная функция, т.е. частное от деления двух многочленов.

Здесь $u = \ln x$; $u = \operatorname{arctg} \alpha x$; $u = \operatorname{arcctg} \alpha x$; $dv = R(x)dx$.

◆ Пример 2.95

Найти $\int (x+1)e^{2x} dx$.

Решение:

Данный интеграл преобразуем по формуле (2.8):

$$P(x) = x + 1 \qquad \alpha = 2 \qquad u = x + 1 \qquad dv = e^{2x} dx.$$

Следовательно, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$, $du = dx$.

Используея формулу (2.7), получим:

$$\int (x+1)e^{2x} dx = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}e^{2x} + C,$$

$$\int (x+1)e^{2x} dx = \frac{1}{4}(x+1)e^{2x} + C.$$

◆ Пример 2.96

Найти $\int \ln x dx$.

Решение:

Согласно (2.9) $u = \ln x$; $dv = dx$, т.е. $v = x$; $du = (\ln x)' dx$.
Используя формулу (1) из таблицы 2, получим:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x(\ln x)' dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

◆ Пример 2.97

Найти $\int x^2 \cos x dx$.

Решение:

Используем (2.8), затем формулу (2.7).
Здесь $u = x^2$, $dv = \cos x dx$, следовательно, $du = 2x dx$;

$$v = \int dv = \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int \sin x \cdot 2x dx =$$

$$= x^2 \sin x - 2\int x \cdot \sin x dx$$

Опять интегрируем по частям $u = x$,
$dv = \sin x dx = d(\cos x)$, $v = -\cos x + C$.

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2\int x d(\cos x) =$$

$$= x^2 \sin x - 2\left(-x \cdot \cos x - \int (-\cos x) dx\right) =$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x + C =$$

$$= (x^2 - 2)\sin x + 2x \cos x + C.$$

Примеры применения неопределенного интеграла для решения задач

◆ Пример 2.98

Дано уравнение скорости движения тела $v = t^2 - 4t + 1$ (*м/с*). Найти уравнение пути, если тело за первые 3 *с* прошло путь 24 *м*.

Решение:

Уравнение пути $s(t)$ находится интегрированием:

$$v=\frac{dS}{dt} \Rightarrow S(t)=\int v dt;$$

$$S(t)=\int(t^2-4t+1)\,dt=\int t^2 dt-4\int t dt+\int dt=\frac{t^3}{3}-4\frac{t^2}{2}+t+C;$$

$$S(t)=\frac{t^3}{3}-2t^2+t+C.$$

Найдем C из дополнительных условий при $t=3$ *с*, $S=24$ *м*:

$$24=\frac{3^2}{3}-2\cdot 3+3+C;$$

$$24=9-18+3+C \Rightarrow C=30.$$

Ответ: уравнение пути имеет вид $S(t)=\dfrac{t^3}{3}-2t^2+t+30$ (*м*).

◆ Пример 2.99

Найти $\int e^{-2x}dx$, если при $x=0$ первообразная функции равна 5,5.

Решение:

$$\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}+C.$$

Найдем C, исходя из условий задачи, при $x=0$ и $F(x)=5{,}5$:

$$5{,}5=-\frac{1}{2}e^0+C \Rightarrow C=6.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{2}e^{-2x}+6$.

Задания для самостоятельного решения

- Найти неопределенные интегралы:

187. $\int \frac{\sin 2x}{3\sin x}dx$;

188. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)dx$;

189. $\int (\sqrt{x}+2)^2 dx$;

190. $\int (x^2-2)(x+3)\,dx$;

191. $\int \left(\frac{1-x}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\right)dx$;

192. $\int 2\sin x+6-3x^2)dx$;

193. $\int \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$;

194. $\int (\sin 4x-\cos 2x)dx$;

195. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx$;

196. $\int \frac{dx}{\cos^2(a-bx)}$;

197. $\int x^2\sin 3x^3 dx$;

198. $\int \frac{dx}{\cos^2(1-2x)}$;

199. $\int \frac{dx}{\sin^2 7x}$;

200. $\int \frac{\sin 3x dx}{1+\cos 3x}$;

201. $\frac{dx}{3+4x^2}$;

202. $\int \frac{xdx}{25+x^2}$;

203. $\int \frac{2xdx}{x^4+3}$;

204. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$;

205. $\int x^2 \sin x dx$;

206. $\int (4-x)\cos 3x dx$.

207. Ток в цепи, содержащей конденсатор, меняется с течением времени по закону , где $J_{\max}$ и ω — известные постоянные величины. Определить, как изменяется со временем заряд конденсатора, если в момент времени, когда ток максимален, заряд конденсатора равен нулю.

208. В любой момент времени ускорение тела $a=\frac{3}{2}t^2$ (*м/с*^{2}). Найти зависимость пройденного пути от времени движения, зная, что тело начало двигаться из состояния покоя с начальной скоростью 8 *м/с*.

209. Сила, действующая на тело, в направлении движения меняется со временем по закону $F = 6t\ (H)$. Найти скорость тела в любой момент, зная, что в момент начала отсчета времени она была равна 1 *м/с*. Масса тела 3 *кг*.

210. Скорость движения кисти руки задана уравнением $v = \frac{1}{2}t^2 + 3$ (*см/с*). Найти уравнение движения кисти, если за первые 6 *с* было пройдено 40 *см*.

211. Найти закон изменения скорости тела, если уравнение ускорения имеет вид: $a = 3t^2 - 4t + 4$ (*м/с*) и если через 2 *с* скорость тела была 16 *м/с*.

212. Найти $\int (x^2 - 1)dx$, если при $x = -3$ первообразная функция равна –4.

213. Найти $\int \frac{5dx}{x-3}$, если при $x = 4$ первообразная функция равна 2.

214. Найти $\int (\sin x - \cos x)dx$, если при $x = \frac{\pi}{4}$ первообразная функция равна $4\sqrt{2}$.

215. Угловая скорость вращения барабана кимографа $\omega = 6t^2 - 4t + 5$. Найти угол поворота, если за $t = 2$ *с* был совершен поворот на $\varphi = 2\,рад$.

2.1.12. Определенный интеграл

Определенный интеграл — это общий предел всех интегральных сумм функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Интегральная сумма $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где ξ_i — произвольная точка существующего отрезка.

Определенный интеграл обозначается:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где $f(x)$ — подынтегральная функция, x — переменная интегрирования.

Теорема. *Если $F(x)$ — первообразная функция для непрерывной функции $y=f(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$, то имеет место формула:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Это *формула Ньютона–Лейбница* — основная формула интегрального исчисления, устанавливающая связь между определенным и неопределенным интегралом. Она читается так:

> *Определенный интеграл* — это разность значений любой первообразной функции для $f(x)$ при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Можно отметить разницу между определенным и неопределенным интегралами: определенный интеграл — это число, а неопределенный интеграл — это функция.

Основные свойства определенного интеграла

1. При перестановке пределов изменяется знак интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2. Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$ (*свойство аддитивности*).

4. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их определенных интегралов.

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

6. Если функция $f(x) \geq 0$ всегда на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^a f(x)dx \geq 0.$$

7. Если $f(x) \leq g(x)$ всюду на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Геометрический смысл определенного интеграла: он численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$; $x = b$; $y = 0$ и частью графика функции $y = f(x)$, взятой со знаком плюс, если функция положительна, и со знаком минус, если функция отрицательна (рис. 2.19).

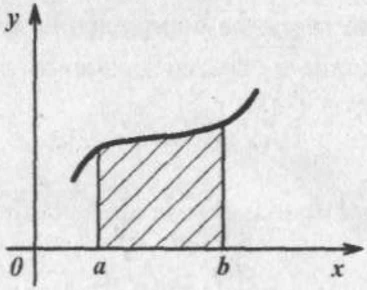


Рис. 2.19. *Геометрическая интерпретация определенного интеграла*

◆ Пример 2.100

$$\int_2^3 3x^2dx.$$

Решение:

Применяя формулу Ньютона–Лейбница и свойства определенного интеграла, получим:

$$\int_2^3 3x^2dx = 3\int_2^3 x^2dx = x^3\Big|_2^3 = 3^3 - 2^3 = 19.$$

◆ Пример 2.101

$$\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}.$$

Решение:

Вводим новую переменную интегрирования, полагая $\sqrt{1+3x} = t$.

Отсюда находим новые пределы интегрирования: $t_1 = 1$ при $x_1 = 0$ и $t_1 = 4$ при $x_1 = 5$.

Подставляя, получим:

$$\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1+3x} = t \\ 1+3x = t^2 \\ x = \dfrac{t^2-1}{3} \\ dx = \dfrac{2t}{3}dt \end{array} \right| = \int_1^4 \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{3\cdot t\cdot 3} = \frac{2}{9}\int_1^4 (t^2-1)dt =$$

$$= \frac{2}{9}\int_1^4 t^2dt - \frac{2}{9}\int_1^4 dt == \frac{2}{9}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_1^4 - \frac{2}{9}\cdot t\Big|_1^4 =$$

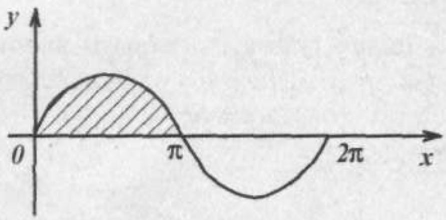
$$= \frac{2}{9}\left(\frac{64}{3} - \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{9}(4-1) = \frac{2}{9}\cdot 21 - \frac{2}{9}\cdot 3 = \frac{2}{9}\cdot 18 = 4.$$

Применение определенного интеграла для решения прикладных задач

▸ ***Площадь плоской фигуры***

◆ Пример 2.102

Определить площадь полуволны синусоиды.

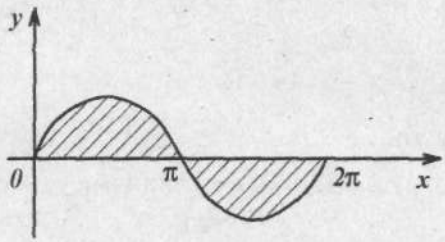


Решение:

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(\cos\pi-\cos 0)=-(-1-1)=2\ (кв.\,ед.).$$

◆ Пример 2.103

Определить площадь полной синусоиды.



Решение:

$$S=\int_0^{2\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{2\pi}=-(+1-1)=0.$$

Ответ: $S=0$.

◆ Пример 2.104

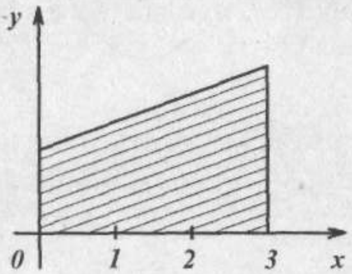
Сколько краски нужно, чтобы закрасить области, заштрихованные на рисунке примера 2.103.

Для ответа на этот вопрос надо брать площади по модулю.

◆ Пример 2.105

Определить площадь фигуры, образованной функцией $y = 2x + 5$ и осью при изменении x от 0 до 3.

Решение:



$$S = \int_0^3 (2x+5)dx = 2\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3 + 5x\Big|_0^3 = x^2\Big|_0^3 + 5x\Big|_0^3 = 9 + 15 =$$

$= 24$ (*кв. ед.*).

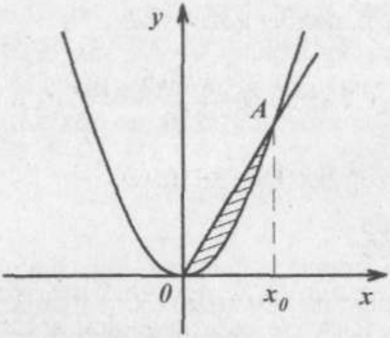
◆ Пример 2.106

Вычислить площадь между линиями $y_1 = x^2$ и $y_2 = 3x$.

Решение:

Искомая площадь — это разность между площадью прямоугольного треугольника $0Ax_0$ и площадь криволинейного треугольника, ограниченного сверху участком параболы.

$$S = \int_0^{x_0} 3x dx - \int_0^{x_0} x^2 dx .$$



Точку x_0 — абсциссу точки пересечения графиков находим из уравнения $x^2 = 3x \Rightarrow x_0 = 3$.

$$S = \int_0^3 3x dx - \int_0^3 x^2 dx = 3\frac{x^2}{2}\bigg|_0^3 - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = 4{,}5 \ (\textit{кв. ед.}).$$

▸ ***Физические задачи***

Пример 2.107

Определить силу давления воды на стенку аквариума с основанием 1,8 *м* и высотой 0,6 *м*.

Дано:
$l = 1{,}8$ *м*
$h = 0{,}6$ *м*

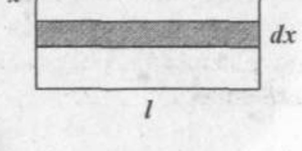
F — ?
$\rho = 10^3$ *кг/м*^{3}
$g = 9{,}8$ *м/с*^{2}

Решение:

$$P = \frac{F}{S} \Rightarrow F = P \cdot S,\ F = \int P\, dS.$$

Величина P давления жидкости на горизонтальную площадку зависит от глубины ее погружения x, т.е. от расстояния площадки до поверхности жидкости:

$$P = \rho \cdot g \cdot x\,.$$



Площадь этой полоски $ds = l \cdot dx$.

$$F = \int_0^{0,6} \rho g x \cdot l \cdot dx = \rho g l \frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,6} = \frac{\rho g l}{2}(0,36 - 0) =$$

$$= 0{,}18 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}8 = 3{,}2 \ (кН).$$

◆ Пример 2.108

Через участок тела животного проходит импульс тока, который изменяется с течением времени по закону $J = 20e^{-5t}$ ($мА$). Длительность импульса 0,1 $с$. Определить работу, совершаемую током за это время, если сопротивление участка 20 $кОм$.

Решение:

За малый интервал времени dt, на котором ток можно считать почти неизменным, совершается работа $dA = J^2 R dt$.

За время действия импульса совершенная работа равна

$$A = \int_0^{0,1} J^2 R dt;$$

$$J = 20 \cdot 10^{-3} e^{-5t} (A),$$

$$R = 20 \cdot 10^3 \ (Ом),$$

$$A = \int_0^{0,1} 4 \cdot 10^{-4} e^{-10t} \cdot 20 \cdot 10^3 dt = 80 \cdot 10^{-1} \int_0^{0,1} e^{-10t} dt =$$

$$= 8 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot e^{-10t} \Big|_0^{0,1} = -0{,}8\left(e^{-1} - e^0\right) = -0{,}8\left(\frac{1}{e} - 1\right) = 0{,}5 \ (Дж).$$

◆ Пример 2.109

Найти работу при растяжении мышцы на 4 $см$, если для ее растяжения на 1 $см$ требуется нагрузка 10 $Н$. Считать, что сила, необходимая для растяжения мышц, пропорциональна ее удлинению.

Дано:
$L = 4\ см = 0{,}04\ м$
$x_1 = 0{,}01\ см$
$F_1 = 10\ H$

A — ?

Решение:

$$A = \int_0^{0,04} dA = \int_0^{0,04} kx \cdot dx = k\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{0,04};$$

Найдем жесткость пружины:

$$F_1 = kx_1 \Rightarrow k = \frac{F_1}{x_1}; k = \frac{10}{0{,}01} = 10^3\,\frac{H}{м};$$

$$A = 10^3 \cdot \frac{1}{2}\left(0{,}04^2 - 0\right) = 500 \cdot 0{,}04^2 = 0{,}8\ (Дж).$$

▸ ***Некоторые задачи экономики***

В экономических задачах переменная меняется дискретно, но достаточно часто. Для использования методов интегрирования, предполагающих непрерывность функций, надо составить модель (упрощенный аналог реального объекта), в которой аргументы и функции меняются непрерывно.

◆ Пример 2.110

Найти количество произведенной продукции (дневную выработку) P за восьмичасовой рабочий день, если изменение производительности труда $f(t)$ в течение дня можно описать формулой:

$$f(t) = P_0(-0{,}2t^2 + 1{,}6t + 3),$$

где t — время в часах; P_0 — некоторая постоянная, имеющая размерность производительности.

Чему равен объем продукции P_3 за третий час рабочего дня?

Решение:

Эта формула вполне отражает реальный процесс работы (рис. 2.20). Производительность сначала растет, достигая максимума в середине рабочего дня при $t = 4$ *ч*, а затем падает.

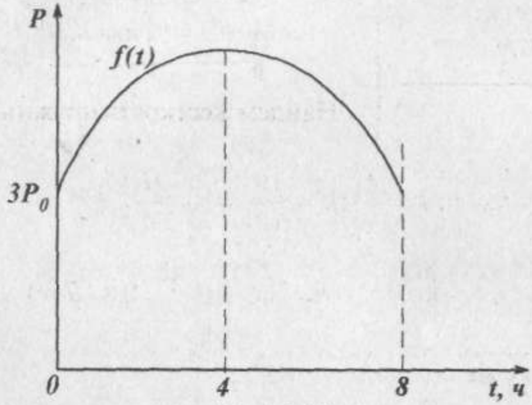


Рис. 2.20

Будем полагать, что производительность труда меняется в течение дня непрерывно, т.е. $f(t)$ — непрерывная функция от времени t на отрезке [0, 8].

Дневная выработка P — это определенный интеграл — площадь криволинейной трапеции, ограниченная сверху кривой $f(t)$.

$$P = \int_0^8 f(t)dt = \int_0^8 P_0(-0{,}2t^2 + 1{,}6t + 3)dt =$$

$$= P_0\left(-0{,}2\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^8 + 0{,}8t^2\Bigg|_0^8 + 3t\Bigg|_0^8 \right) = 41{,}06P_0 .$$

Объем продукции P_3, произведенной за третий час рабочего дня, равен:

$$P_3 = \int_2^3 P_0(-0{,}2t^2 + 1{,}6t + 3)dt =$$

$$P_0\left(-0{,}2\frac{t^3}{3} + 0{,}8t^2 + 3t \right)\Bigg|_2^3 = 5{,}75P_0 .$$

Задания для самостоятельного решения

216. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$;

217. $\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x dx$;

218. $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^6}$;

219. $\int_0^{\ln 2} e^{2x} dx$;

220. $\int_0^4 \left(1+e^{\frac{x}{4}}\right) dx$;

221. $\int_0^{\pi/4} \pi\cos^2 x dx$;

222. $\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$;

223. $\int_0^{\pi/4} \cos^2 x dx$;

224. $\int_0^1 (2+3x^2)^2 x dx$;

225. $\int_0^1 \frac{3x dx}{4-x^2}$;

226. $\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^3 x dx$;

227. $\int_0^1 x^2 \sqrt[3]{(2-x^3)^2} dx$;

228. $\int_0^{\pi/2} \pi\sin^3 x dx$;

229. $\int_0^{2\pi} \sin\frac{x}{4} dx$;

230. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$;

231. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \mathrm{tg}^2 x dx$;

232. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$;

233. $\int_1^{10} \frac{1+2x+3x^2}{x} dx$;

234. $\int_0^4 \frac{x dx}{\sqrt{x^2+9}}$;

235. $\int_1^2 2^{3x} dx$;

236. $\int\limits_0^{\pi/4} \cos 2x dx$; **237.** $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{7dx}{\sqrt{2-x^2}}$;

238. $\int\limits_{-a}^{a} (3x^2 - a)dx$; **239.** $\int\limits_0^1 \frac{x^2\, dx}{1+x^2}$;

240. $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$; **241.** $\int\limits_2^6 \frac{2x\, dx}{\sqrt{x^2+45}}$.

242. Через тело животного проходит импульс тока, который изменяется со временем по закону $J = 20e^{-5t}$ ($мА$). Длительность импульса равна 0,1 $с$. Определить заряд, протекающий через тело животного.

243. Вычислить площадь между линиями $y_1 = x^3$ и $y_2 = 4x$. Изобразите эту площадь графически.

244. Вычислить площадь между линиями $y_1 = 2x - x^2$ и $y_2 = 0$. Изобразите эту площадь графически.

245. Вычислить площадь части косинусоиды от 0 до $\frac{3}{2}\pi$.

246. Определить площадь треугольника, образованного графиком функции $y = x^2$ и осью абсцисс при изменении x от 0 до 1.

247. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$ аналитически и дать геометрическую интерпретацию, т.е. вычислить площадь криволинейной трапеции.

248. Найти суточное потребление электроэнергии в кВт·ч, если мощность P потребляемой городом электроэнергии выражается формулой:

$$P = \begin{cases} 15000\,(кВт)\; t < 6 \\ 15000 + 12000 \sin\frac{\pi}{18}(t-6)\; t \geq 6, \end{cases}$$

где t — текущее время суток ($ч$).

2.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения

В дифференциальных уравнениях неизвестная функция содержится вместе со своими производными. Дифференциальные уравнения являются основой математических моделей, к построению которых приводит изучение закономерностей общественных процессов, исследование разнообразных явлений, происходящих в природе. В описания конкретных свойств систем и механизмов, в выражения тех или иных научных законов входят, как правило, производные интересующих функций, а не сами функции.

Основной задачей теории дифференциальных уравнений является изучение функций, представляющих собой решения этих уравнений. В этой главе в части 2.2 рассматриваются *обыкновенные* дифференциальные уравнения, в которых неизвестные функции зависят от одной переменной, а в части 2.3 будут рассмотрены дифференциальные уравнения *в частных производных*, в которых неизвестные функции являются функциями двух и более числа переменных.

2.2.1. Основные понятия

Дифференциальное уравнение — это равенство, содержащее производные или дифференциалы неизвестной функции.

Общий вид дифференциального уравнения:

$$F(x, y, y', y''...) = 0 \text{ — неявная форма,}$$

где x — независимая переменная; y — неизвестная функция; y' — её производная первого порядка и т.д.

Например: $(y')^2 + 3xy = 0$; $5y'' + 3y' - 4y = 0$.

Если из уравнения можно выразить y', то оно примет вид: $y' = f(x, y)$ — явная форма. Это уравнение первого порядка, *разрешенное относительно производной.*

Порядок дифференциального уравнения — это порядок высшей производной, содержащейся в этом уравнении.

Например, уравнение $y'' + 5y' - 3y = 0$ — это дифференциальное уравнение второго порядка.

Решение дифференциального уравнения — это функция $y = y(x)$, определенная на некотором интервале (a, b), удовлетворяющая этому уравнению, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.*

Общее решение — это решение, зависящее от произвольных постоянных. Оно содержит столько независимых переменных, каков порядок уравнения. *Общее решение* дифференциального уравнения — это семейство функций $y = \varphi(x, C)$, удовлетворяющее этому уравнению при произвольном значении постоянных C.

Например, для дифференциального уравнения $xy' - 2x^2 = 0$ функция $y = x^2$ будет решением, так как при ее подстановке левая часть уравнения тождественно обращается в нуль: $x \cdot 2x - 2x^2 = 0$.

Частное решение — это решение, получающееся из общего решения при конкретных определенных значениях произвольных постоянных $y = \varphi(x, C_0)$. Для нахождения частных решений задают *дополнительные условия*. Эти условия будут называться *начальными*, если все они относятся к одному и тому же значению независимой переменной. *Начальные условия*, или *условия Коши*, задают значение функции y_0 в фиксированной точке x_0. $y_0 = y|_{x_0}$.

Об этом говорит теорема Коши.

Теорема Коши. *Пусть дано дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$. Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой области D плоскости $0xy$, то в некоторой окрестности любой внутренней точки (x_0, y_0) этой области D существует единственное решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее условию $y = y_0$ при $x = x_0$.*

6. Зак. 649

С геометрической точки зрения в области D содержится множество интегральных кривых $y=\varphi(x,C)$, соответствующих различным значениям C. Теорема Коши говорит о том, что, при соблюдении определенных условий, через каждую внутреннюю точку области D проходит только одна интегральная кривая. То есть начальные условия фиксируют произвольную постоянную C и позволяют выбрать из семейства интегральных кривых уравнения только одну интегральную кривую $y=\varphi(x,C_0)$, проходящую через заданную точку (x_0, y_0).

Например, дифференциальное уравнение $y' = 2x$ имеет общее решение $y=x^2+C$, где C — произвольная постоянная. Это семейство парабол. Частное решение при произвольных условиях $y_0 = y\big|_{x_0}$ будет иметь вид:

$y=x^2+C \Rightarrow C=y_0-x_0^2$. Подставим в общее решение.

$y=x^2+y_0-x_0^2$ — это частное решение. Оно выделяет одну параболу из семейства кривых, проходящую через точку (x_0, y_0).

◆ Пример 2.111

Проверить подстановкой, что дифференциальное уравнение $y'-2y=e^{3x}$ имеет общее решение в виде

$$y=e^{3x}+Ce^{2x}.$$

Найти частное решение, удовлетворяющее условию $y=3$ при $x=0$.

Решение:

$y=e^{3x}+Ce^{2x}$; $\qquad y'=3e^{3x}+2Ce^{2x}$.

Подставим в дифференциальное уравнение:

$3e^{3x}+2Ce^{2x}-2(e^{3x}+Ce^{2x})=e^{3x}$

$3e^{3x}+2Ce^{2x}-2e^{3x}-2Ce^{2x}=e^{3x}$

$e^{3x}=e^{3x}$ — это тождество.

Частное решение.

$y = e^{3x} + Ce^{2x}$; $3 = e^0 + Ce^0 \Rightarrow C = 3$

$y = e^{3x} + 3e^{2x}$ — частное решение.

Задания для самостоятельного решения

Проверить подстановкой, что данная функция является общим решением (интегралом) данного дифференциального уравнения:

249. $y = \sqrt{x}$ $\qquad 2yy' = 1;$

250. $y = Cx^2 - \dfrac{1}{x}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} - 2\dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{x^2};$

251. $\ln x \cdot \ln y = C$ $\qquad y \ln y\, dx + x \ln x\, dy = 0.$

2.2.2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Уравнение первого порядка $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ называется уравнением с разделяющимися переменными, если функции P и Q разлагаются на множители, зависящие каждый только от одной переменной:

$$f_1(x)f_2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0.$$

В таком уравнении после деления его членов на $f_2(y) \cdot \varphi_1(x)$ переменные разделяются:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0,$$

и каждый член уравнения зависит от одной переменной.

Общий интеграл уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0.$$

Рассмотрим примеры решения уравнений методом разделения переменных.

◆ Пример 2.112

Найти общие интегралы уравнения:
$(x+1)^3 dy-(y-2)^2 dx=0.$

Решение:

Разделим переменные в данном уравнении, деля обе его части на $(x+1)^3 \cdot (y-2)^2$.

$$\frac{dy}{(y-2)^2}-\frac{dx}{(x+1)^3}=0.$$

Почленно интегрируя первое слагаемое по y, а второе — по x, получим искомое общее решение:

$$-\frac{1}{y-2}-\frac{1}{2(x+1)^2}=C.$$

◆ Пример 2.113

Найти частное решение дифференциального уравнения $\frac{dy}{y}=(x-1)dx$ при $x_0=2$, $y_0=5$.

Решение:

$$\frac{dy}{y}=xdx-dx;$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int xdx-\int dx;$$

$$\ln|y|=0{,}5x^2-x+\ln C.$$

Есть правило: если в решении содержится логарифм, то константу интегрирования C также записываем как $\ln C$.

Умножим $(0{,}5x^2-x)$ на $\ln e$, $(\ln e=1)$

$$\ln|y|=\ln e^{0{,}5x^2-x}+\ln C;$$

$|y|=C\cdot e^{0{,}5x^2-x}$ — это общее решение дифференциального уравнения.

Найдем частное решение. Для этого вычислим C при $x_0 = 2$ и $y_0 = 5$.

$$5 = Ce^{2-2} \Rightarrow C = 5.$$

Частное решение $y = 5e^{0,5x^2 - x}$.

◆ Пример 2.114

Найти частное решение дифференциального уравнения $xy' - y = 0$ при начальных условиях $y_0 = 2$ при $x_0 = -4$.

Решение:

Разделим переменные, записав предварительно, что $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$x\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

$$xdy = ydx.$$

Разделим обе части на xy:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем обе части этого уравнения: правую часть по x, а левую — по y.

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|,$$

где C — произвольная интегрирования.

При потенцировании получаем:

$|y| = |Cx|$, или $y = \pm\, Cx$, или $y = C_1 x$ — это семейство интегральных кривых.

Выделим частное решение. В эту формулу подставим $y_0 = 2$ при $x_0 = -4$.

$$2 = C(-4) \Rightarrow C = -\frac{1}{2}.$$

Частное решение имеет вид: $y = -\frac{1}{2}x$.

◆ Пример 2.115

Решить уравнение $2ydy + \dfrac{dx}{x+2} = 0$.

Решение:

Это уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрируем оба слагаемых:

$$y^2 + \ln|x+2| = C.$$

◆ Пример 2.116

Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = x\dfrac{\sqrt{y^2+1}}{y}$, проходящее через точку (0, 1).

Решение:

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{\sqrt{y^2+1}}{y}.$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = xdx.$$

Проинтегрируем: $\displaystyle\int\frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \int xdx.$

Интеграл в левой части берем при помощи замены переменной $\sqrt{y^2+1} = \dfrac{x^2}{2} + C$.

Произвольная постоянная равна: $C = \sqrt{2}$, и частное решение имеет вид:

$$\sqrt{y^2+1} = \frac{x^2}{2} + \sqrt{2}.$$

◆ Пример 2.117

Найти общее и частное решение дифференциального уравнения и показать на графике $y' = -\dfrac{x}{y}$ при $x_0 = 3, y_0 = 4$.

Решение:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y};\ ydy = -xdx;\ \int ydy = -\int xdx;\ \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

или $x^2 + y^2 = C$ — общее решение. Найдем C.

$C = 9 + 16 = 25.$

$x^2 + y^2 = 25$ — частное решение.

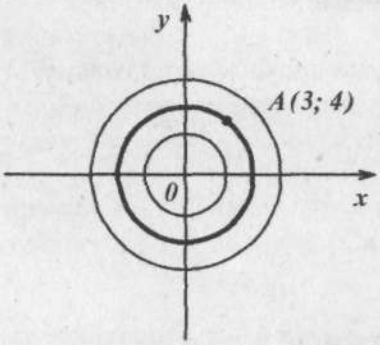


Рис. 2.21

Интегральными кривыми данного уравнения является семейство концентрических окружностей с центром в начале координат (рис. 2.21). А частное решение — это окружность, проходящая через точку с координатами $x = 3$, $y = 4$.

2.2.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка — это уравнение вида:

$$y' + P(x)y = q(x), \tag{2.10}$$

где $P(x)$ и $q(x)$ — непрерывные функции.

Название уравнения «линейное» связано с тем, что неизвестная функция и ее производная входят в первой степени, т.е. линейно.

- *Линейное однородное уравнение* будет, если $q(x) \equiv 0$, т.е. это уравнение вида:

$$y' + P(x)y = 0. \tag{2.11}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, и его решение будет иметь вид:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{2.12}$$

- *Линейное неоднородное уравнение* будет, если функция $q(x)$ не равна тождественно нулю:

$$q(x) \neq 0: y' + P(x)y = q(x). \tag{2.13}$$

Общее решение линейного уравнения первого порядка находится методом вариации постоянной и имеет вид:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}[C + \int q(x)e^{\int P(x)dx}dx]. \tag{2.14}$$

Или можно в уравнении (2.12) C заменить на неизвестную функцию $u(x)$, решение искать в виде:

$$y = u(x)e^{-\int P(x)dx}. \tag{2.15}$$

- *Уравнение Бернулли* — это нелинейное уравнение вида:

$$y' + P(x)y = q(x)y^n,$$

где n — некоторое постоянное число. При $n = 1$ — это линейное однородное уравнение.

$$y' + (p - q)y = 0.$$

При $n = 0$ — это линейное неоднородное уравнение.

Если $n \neq 0$ и $n \neq 1$, то нелинейные уравнения сводятся к линейным соответствующими заменами $y(x)$.

Пример 2.118

Решить уравнение: $y' + x^2 y = x^2$.

Решение:

Это линейное неоднородное уравнение первого порядка, где $P(x) = x^2$ и $q(x) = x^2$ (2.13).

В решении в (2.14):

$$\int P(x)dx=\int x^2dx=\frac{x^3}{3},\quad \int q(x)e^{\int P(x)dx}dx=\int x^2e^{\frac{x^3}{3}}dx=e^{\frac{x^3}{3}}.$$

Решение будет иметь вид:

$$y(x)=e^{-\frac{x^3}{3}}\left(C+e^{\frac{x^3}{3}}\right)=Ce^{-\frac{x^3}{3}}+1.$$

◆ Пример 2.119

Решить уравнение: $xy'+y=e^x$.

Решение:

Данное уравнение може быть приведено к виду (2.13):

$$y'+\frac{y}{x}=\frac{e^x}{x}.$$

$$P(x)=\frac{1}{x},\qquad q(x)=\frac{e^x}{x}.$$

$$\int P(x)dx=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|;\qquad e^{-\int P(x)dx}=e^{-\ln|x|}=\frac{1}{x}.$$

$$\int q(x)e^{\int P(x)dx}dx=\int\frac{e^x}{x}\cdot e^{\ln x}dx=\int e^xdx=e^x.$$

Формула (2.14), выражающая общее решение, примет вид:

$$y(x)=\frac{1}{x}(e^x+C).$$

◆ Пример 2.120

Решить линейное уравнение первого порядка:

$$y'-\frac{4x}{x^2+1}y=x^2+1.$$

Решение:

Сделаем иначе. Сначала решим линейное однородное уравнение, т.е. вместо правой части будет нуль:

$$y'-\frac{4x}{x^2+1}y=0.$$

Разделим переменные: $\dfrac{dy}{y} - \dfrac{4x}{x^2+1}dx = 0$.

Интегрируем: $\ln|y| - 2\ln(x^2+1) = \ln C$.

Потенцируем:

$y = C(x^2+1)^2$ — решение однородного уравнения (2.16).

Решение неоднородного уравнения будем искать в виде (2.15):

$$y = u(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

Сравним (2.12) и (2.16):

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \quad \text{и} \quad y = C(x^2+1)^2.$$

Видим, что $\int P(x)dx = (x^2+1)^2$.

Следовательно, (2.17) примет вид: $y = u(x)(x^2+1)^2$.

Подставим это выражение в исходное уравнение:

$y' - \dfrac{4x}{x^2+1}y = x^2+1$,

$y' = u'(x)(x^2+1)^2 + 2(x^2+1)\cdot 2x \cdot u(x)$,

$u'(x)(x^2+1)^2 + 4x(x^2+1)u(x) - 4x(x^2+1)u(x) = x^2+1$.

Отсюда $u'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \Rightarrow u(x) = \operatorname{arctg} x + C$

и решение примет вид: $y = (\operatorname{arctg} x + C)(x^2+1)^2$.

Задания для самостоятельного решения

- Найти общие решения дифференциальных уравнений методом разделения переменных:

252. $\cos x \dfrac{dy}{dx} = (y+1)\sin x$; **253.** $xy' - y = 0$;

254. $yy' + x = 0$; **255.** $x^2y' + y = 0$;

256. $y' = y$; **257.** $y' = \sin x$;

258. $y' = e^{3x+y}$.

- Найти частные решения уравнений первого порядка, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

259. $x^2 \dfrac{dy}{dx} = y$, $y_0 = 5$ при $x_0 = 0$;

260. $y' = \dfrac{y}{4x}$, $y_0 = -10$ при $x_0 = 16$;

261. $\dfrac{xdx}{y} - dy + \dfrac{dx}{4y} = 0$, $(y \neq 0)$, $y_0 = -5$ при $x_0 = 3$;

262. $2y'\sqrt{x} = y$, $y_0 = 1$ при $x_0 = 4$;

263. $x^2 y + y^2 = 0$, $y_0 = 1$ при $x_0 = -4$;

264. $xy' = \dfrac{y}{\ln x}$, $y_0 = 1$ при $x_0 = e$;

265. $(x+3)dy + (y-2)dx = 0$, $y_0 = 3$ при $x_0 = -2$;

266. $(x^2 - 1)dx + ydy = 0$, $y_0 = 0$ при $x_0 = 2$;

267. $2x^2 dy - y^2 dx = 0$, $y_0 = 1$ при $x_0 = 1$;

- Решить линейные уравнения первого порядка:

268. $y' - \dfrac{y}{x} = x$;

269. $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3$;

270. $y' + x^2 y = 2e^{-\frac{x^3}{3}}$;

271. $y' - y = e^x$;

272. $y' = x + y$;

273. $xy' + y = 3$;

274. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$;

275. $y - xy' = y \ln \dfrac{x}{y}$;

276. $(x + 2y)dx + 2xdy = 0$;

277. $xy' - 2y = 3x^5$.

- Найти частные решения однородных дифференциальных уравнений:

278. $x\,dy - y\,dx = y\,dy$, если при $x = -1$, $y = 1$;

279. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$, если при $x = 1$, $y = -2$.

2.2.4. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнения вида $a_0\dfrac{d^2y}{dx^2}+a_1\dfrac{dy}{dx}+a_2y=0$ называются линейными однородными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами.

Общий интеграл находится с помощью характеристического уравнения $a_0k^2+a_1k+a_2=0$, которое получается из этого уравнения, если, сохраняя в нем все коэффициенты a_i, заменить функцию y единицей ($y=1$), а все ее производные — соответствующими степенями k. При этом:

1. Если все корни характеристического уравнения *действительные и различные*, то общий интеграл имеет вид: $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$.

2. Если характеристическое уравнение имеет корни *действительные и равные* ($k_1=k_2=k$), то $y=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}$.

3. Если корни *мнимые* ($k=\pm bi$), то $y=C_1\cos bx+C_2\sin bx$.

4. Если корни *комплексные* ($k=a\pm bi$), то

$$y=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx).$$

Найти общие решения следующих дифференциальных уравнений.

◆ Пример 2.121

$$2\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+2y=0.$$

Решение:

Составим характеристическое уравнение:

$$2k^2-5k+2=0,$$

$$k_1=2,\ k_2=\frac{1}{2}.$$

Общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x/2}.$$

◆ Пример 2.122

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0.$$

Решение:

$$k^2 - 8k + 16 = 0,\ k_1 = k_2 = 4.$$

Общее решение данного однородного уравнения имеет вид:

$$y = e^{4x}(C_1 + C_2 x).$$

◆ Пример 2.123

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0.$$

Решение:

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:

$k^2 + 1 = 0$, $k = \pm i$, где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

◆ Пример 2.124

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 25y = 0.$$

Решение:

$$k^2 + 8k + 25 = 0.$$

Комплексно сопряженные корни таковы: $k = -4 \pm 3i$,

$$y = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Задания для самостоятельного решения

- Найти общее решение:

280. $y'' - 3y' = 4y$;

281. $y'' - 5y' + 6y = 0$;

282. $y'' - 10y' + 26y = 0$;

283. $y'' - 5y' - 6y = 0$;

284. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$.

- Найти частное решение:

285. $y'' + 4y' + 5y = 0$, при $y(0) = -3$, $y'(0) = 0$;

286. $y'' + 25y' = 0$, при $y(1) = 20$, $y'(1) = 10$;

287. $y'' - y = 0$, при $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

288. $y'' - 4y' = 0$, при $y(0) = 0$, $y'(0) = 8$;

289. $y'' + 2y' + 2y = 0$, при $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

290. $y'' - 12y' + 35y = 0$, при $y(1) = 10$, $y'(1) = 2$.

2.2.5. Применение дифференциальных уравнений для решения задач

◆ Пример 2.125

Концентрация лекарственного вещества в крови животного уменьшается вследствие выведения вещества из организма. Скорость уменьшения концентрации пропорциональна концентрации вещества в данный момент. Определить зависимость концентрации данного вещества в крови от времени, если в начальный момент времени она была равна 0,2 *мг/л*, а через 23 ч уменьшилась вдвое.

Решение:

Скорость изменения концентрации и концентрация C в любой момент времени t связана соотношением:

$$-\frac{dC}{dt}=kC,$$

где k — коэффициент пропорциональности, который не зависит от времени. Знак «–» поставлен потому, что концентрация убывает с ростом времени.

Решаем это уравнение 1-го порядка методом разделения переменных:

$$\frac{dC}{C}=-kdt.$$

После интегрирования имеем:

$$\ln C=-kt+\ln C_0, \qquad C=C_0e^{-kt}.$$

Подставляя сюда концентрацию при $t=0$, найдем $C_0=0{,}2$ *мг/л*.

При $t=23$ часа $0{,}1=0{,}2e^{-23k}$ или $2=e^{23k}$.

$$k=\frac{\ln 2}{23}=\frac{0{,}69}{23}\approx 0{,}03 \text{ ч}^{-1}.$$

Закон изменения концентрации: $C(t)=0{,}2e^{-0{,}03t}$ *(мг/л)*.

◆ Пример 2.126

По Ньютону скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности температур тела и воздуха. Если температура воздуха 20 °С, и тело в течение 20 минут охладилось от 100 до 60 °С, то через сколько времени температура тела станет равной 30 °С?

Решение:

Обозначим температуру тела T:

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-20), \quad \frac{dT}{T-20}=kdt, \quad \ln|T-20|=kt+C.$$

Найдем C из начальных условий при $t=0$, $T=100$ °C:

$$\ln 80=k\cdot 0+C, \quad C=\ln 80,$$

$$\ln|T-20|-\ln 80=kt,$$

$$\ln\frac{T-20}{80}=kT, \quad \ln\frac{T-20}{80}=e^{kT},$$

$$T-20=80e^{kT}.$$

Найдем k из дополнительных условий: за 20 мин температура тела уменьшилась на 40 °С: при $t=20$ мин $T=60$ °С:

$$60-20=80\,e^{20k},\ 40=80\,e^{20k},\ e^{20k}=\frac{1}{2},\ k=-\frac{\ln 2}{20},$$

$$T-20=80e^{\frac{-\ln 2}{20}t}.$$

Вычислим теперь, через сколько времени температура тела станет равной 30 °С:

$$30-20=80e^{\frac{-\ln 2}{20}t},\quad t=\frac{20\ln 2^3}{\ln 2}=60\ (мин).$$

◆ Пример 2.127

Популяция бактерий $x(t)$ растет так, что скорость ее роста в момент времени t (t — часы) равна одной десятой от размера популяции. Описать этот процесс роста дифференциальным уравнением. Чему равен размер популяции спустя 10 часов, если начальное условие $x(0)=1000$?

Решение:

Пусть $x(t)$ — размер популяции в момент времени t. Скорость роста — это $\frac{dx}{dt}$. Тогда по условию скорость роста $\frac{dx}{dt}$ в момент времени t равна $0{,}1\,x$. Это дифференциальное уравнение 1-го порядка. Решим его: $\frac{dx}{x}=0{,}1dt$;

$$\ln|x|=0{,}1t+\ln C;\ \ln|x|=0{,}1t\ln e+\ln C;$$

$$x=Ce^{0{,}1t}\text{ — общее решение.}$$

Если $t=0$, $x=1000$.

Найдем C: $1000=C$;

$x=1000\cdot e^{0{,}1t}$ — частное решение.

После 10 часов размер популяции станет равным:

$$x(10)=1000e^{0{,}1\cdot 10}=1000e=2718.$$

Рассмотрим некоторые примеры применения дифференциальных уравнений в непрерывных моделях экономики, где независимой переменной является время t. С помощью таких моделей исследуется эволюция экономических систем. При этом в экономическом процессе устанавливается связь между некоторыми величинами и скоростями их изменения.

◆ Пример 2.128

Определение закона прироста численности населения.

Найти зависимость численности населения N от времени t, если известно, что скорость прироста $\frac{dN}{dt}$ численности населения зависит от его количества N в данный момент времени t. Пусть в начальный момент $t = 0$ эта величина равна N_0.

Решение:

Для построения математической модели предположим, что скорость изменения численности населения $\frac{dN}{dt}$ пропорциональна его количеству в данный момент времени N.

$$\frac{dN}{dt} \sim N.$$

Введем коэффициент пропорциональности k.

$$\frac{dN}{dt} = kN,$$

где k — коэффициент прироста численности населения.

$k > 0$, если численность населения увеличивается, и $k < 0$, если численность убывает.

Решим это дифференциальное уравнение первого порядка, разделяя переменные:

$$\frac{dN}{N} = kdt.$$

Интегрируем: $N = Ce^{kt}$ — общее решение.

Найдем C из начальных условий: $N = N_0$ при $t = 0$.

$$N_0 = Ce^{k\cdot 0} \Rightarrow C = N_0.$$

$N = N_0e^{kt}$ — частное решение. Это закон прироста численности населения.

◆ Пример 2.129

Модель естественного роста выпуска.

Пусть некоторая продукция продается по фиксированной цене P. Пусть $Q(t)$ — качество продукции, реализованное на момент времени t. Тогда доход от продажи на этот момент составит $P \cdot Q$. Пусть часть m указанного дохода $P \cdot Q$ расходуется на инвестиции $J(t)$ в производство реализуемой продукции.

$$J = mPQ,$$

где m — норма инвестиции, причем $0 < m < 1$.

Предположим, что происходит полная реализация производимой продукции. Следовательно, в результате расширения производства будет получен прирост дохода, часть которого опять будет использована для расширения выпуска продукции. Скорость выпуска $\frac{dQ}{dt}$ (акселерация) будет расти, причем скорость выпуска продукции $\frac{dQ}{dt}$ пропорциональна увеличению инвестиций $I(t)$.

$$\frac{dQ}{dt} = aI,$$

где a — величина, обратная норме акселерации.

$$\frac{dQ}{dt} = amPQ.$$

Введем параметр $k = amP$ и получим:

$\frac{dQ}{dt} = kQ$ — это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$Q = Ce^{kt},$$

где C — произвольная постоянная.

Пусть в начальный момент времени t_0 зафиксирован объем выпуска продукции Q_0. Из этого начального условия найдем константу интегрирования C:

$$Q_0 = Ce^{kt_0} \Rightarrow C = Q_0 e^{-kt_0}.$$

Частное решение исходного уравнения будет иметь вид:

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)} \text{ или } Q = Q_0 e^{amP(t-t_0)}.$$

Заметим, что в задачах 2.127–2.129 полученное частное решение примерно одного вида, хотя речь шла о процессе разложения бактерий, приросте численности населения. Это проявилось важное свойство математических моделей: свойство общности.

Задания для самостоятельного решения

291. Скорость растворения лекарственного вещества в таблетках пропорциональна количеству лекарства в таблетке. Известно, что при $t = 0$, $m = m_0$. Найти закон растворения таблетки (т.е. закон изменения массы), если период полурастворения таблетки равен T.

292. В культуре дрожжей быстрота прироста дрожжевого фермента пропорциональна количеству, имеющемуся в наличии в начальный момент x_0. Если это количество удваивается в течение часа, то во сколько раз оно возрастает за 2,5 часа? То есть определить закон прироста дрожжевого фермента в зависимости от времени.

293. Известно, что скорость распада радия пропорциональна его конечному количеству и что половина его первоначального количества распадается в течение 1600 лет. Определить, какой процент данного в количестве m_0 радия распадется в течение 100 лет.

294. В воде с температурой 20 °С в течение 10 минут тело охлаждается от 100 до 60 °С. До какой температуры охладится тело за 30 минут, если по закону Ньютона скорость охлаждения пропорциональна разности температур тела и охлаждающей среды?

295. Найдите закон убывания лекарственного препарата в организме человека, если через 1 час после введения 10 мг препарата в организме его масса уменьшилась вдвое. Какое количество препарата останется в организме после второго часа?

296. Уменьшение интенсивности света при прохождении через поглощающее вещество пропорционально интенсивности падающего света и толщине поглощающего слоя. Найти закон убывания интенсивности света, если известно, что при прохождении слоя толщиной $l = 0{,}5$ *м* интенсивность света убывает в 2 раза.

297. Скорость роста числа микроорганизмов пропорциональна их количеству в данный момент. В начальный момент имелось 100 микроорганизмов, и их число удвоилось за 6 часов. Найти зависимость количества микроорганизмов от времени и количество микроорганизмов через сутки.

298. Популяция бактерий увеличивается таким образом, что удельная скорость роста в момент t (*ч*) составляет величину $\frac{1}{1+2t}$. Допустим, что начальной популяции соответствует $x(0) = 1000$. Какой будет популяция после 4 часов роста? После 12 часов?

2.3. Дифференциальные уравнения в частных производных

2.3.1. Основные понятия

Пусть функция u описывает некоторый физический процесс. Этот процесс протекает во времени t и в пространстве, которое можно характеризовать декартовыми прямоугольными координатами (x, y, z) или в общем случае $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Дифференцируя функцию u, получаем частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ и т.п. или в общем случае $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}$ и т.д. Поскольку в данном процессе эти производные связаны какими-либо соотношениями, то приходим к дифференциальному уравнению, содержащему частные производные.

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых неизвестная функция зависит только от одной переменной, в дифференциальных уравнениях с частными производными (ДУЧП) неизвестная функция зависит от нескольких переменных.

Дифференциальное уравнение в частных производных — это равенство, содержащее **несколько** независимых переменных, искомую функцию и ее частные производные по этим переменным.

В общем виде это уравнение может быть записано так:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots) = 0, \quad (2.18)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые переменные;

$u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — неизвестная искомая функция.

Как было сказано выше, во многих практических задачах в качестве независимых переменных используются время t и пространственные координаты.

Если используется одна пространственная координата, то такие задачи называются *одномерными*, если две — *двумерные*, три — *трехмерные*, четыре и более — *многомерные*.

Порядок уравнения — это наивысший порядок частных производных, входящих в уравнение.

Решение уравнения — это функция $u(x_1, x_2,..., x_n)$, имеющая соответствующие частные производные до требуемого порядка и обращающая это уравнение в тождество.

Интегрирование — это процесс нахождения решений ДУЧП.

Нахождение частного решения, удовлетворяющего тем или иным условиям — основная задача теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Дифференциальное уравнение (2.18) будет *линейным,* если функция F линейна относительно искомой функции $u(x_1, x_2,..., x_n)$ и ее производных.

Дифференциальное уравнение будет *квазилинейным,* если функция F линейна по высшим производным (n-го порядка), т.е. коэффициенты при высших производных зависят только от функции u и ее производных до $(n-1)$-го порядка.

Дифференциальные уравнения второго порядка (т.е. входящие в них старшие производные имеют второй порядок) представляют особый интерес для физических приложений.

С помощью этих уравнений описываются математические модели современных систем проектирования летательных аппаратов, ряд физических явлений в гидродинамике, теплопередаче, электродинамике, оптике, механике. Например, математические уравнения электромагнетизма (уравнения Максвелла), уравнения газовой динамики, закон теплообмена Ньютона. Производные появляются в этих уравнениях потому, что они описывают скорость, ускорение, силу, поток, трение, электрический ток и т.п. Поэтому дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка называют *уравнения математической физики.*

- ***Классификация*** линейных дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными на примере линейного дифференциального уравнения второго порядка, записанного в канонической форме.

Рассмотрим линейное одномерное дифференциальное уравнение второго порядка, в котором в качестве независимых переменных используется время t и одна пространственная координата x.

$$A(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+2B(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{dt\partial x}+$$

$$+C(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+D(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+$$

$$+E(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+F(x,t)\cdot u(x,t)=G(x,t)\ (x,t)\in D, \quad (2.19)$$

где D — некоторая односвязная область изменения независимых переменных x, t;

$u(x, t)$ — искомая функция;

$A(x, t)$, $B(x, t)$, $C(x, t)$, $D(x, t)$, $E(x, t)$, $F(x, t)$ — коэффициенты;

$G(x, t)$ — свободный член (правая часть).

Уравнение (2.19) называется уравнением с *постоянными коэффициентами*, если эти коэффициенты уравнений не зависят от x и t.

В противном случае — это уравнение с *переменными коэффициентами*.

Уравнение (2.19) называется *однородным*, если правая часть $G(x, t)$ тождественно равна нулю для всех x и t.

В противном случае — это *неоднородное* уравнение.

Уравнение (2.19) можно записать компактно, используя обозначения:

$$u'_x=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\ u''_{xx}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \text{ и т.п.}$$

$$Au''_{xx}+2B(x,t)u''_{xt}+Cu''_{tt}+Du'_x+Eu'_t+Fu=G.$$

Уравнение параболического типа — это уравнение (2.19) в точке $M(x_0, t_0)$ (в области D), если в этой точке выполняется условие $B^2 - AC = 0$. Такие уравнения описывают процессы теплопроводности.

Уравнение гиперболического типа в точке $M(x_0, t_0)$ в области D — если $B^2 - AC > 0$. Такие уравнения описывают колебательные системы и волновые движения.

Уравнение эллиптического типа будет при условии $B^2 - AC < 0$. Например, это течение жидкости в стационарных потоках.

В различных точках тип одного и того же уравнения может быть различным.

Уравнение будет *стационарным*, если искомая функция не зависит от времени. Например, стационарное распределение напряженности электрического и магнитного полей.

Нестационарное уравнение будет, если искомая функция зависит от времени.

Линейное нестационарное уравнение с частными производными первого порядка имеет вид:

$$A(x,t)u'_x + B(x,t)u'_t + C(x,t)u = G(x,t).$$

Предполагается, что коэффициенты A, B, C и правая часть G являются заданными непрерывно дифференцируемыми функциями.

Уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$Au'_x + Bu'_t + Cu = G,$$

где коэффициенты не зависят от x и t.

Однородное уравнение имеет вид:

$$Au'_x + Bu'_t + Cu = 0.$$

Правая часть тождественно равна нулю для всех x.

◆ Пример 2.130

Классифицировать следующие уравнения:

1. $u'_t + u'_x = 0$; 2. $u''_{tt} - c^2 u''_{xx} = 0$;

3. $u'_t - a^2 u''_{xx} = 0$; 4. $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$;

5. $u'_t - uu'''_{xxx} = \sin x$; 6. $3u''_{xx} + 7u''_{xt} + 2u''_{tt} = 0$.

Ответ:

1. Линейное одномерное нестационарное однородное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. Его называют *уравнением переноса.*

2. Линейное одномерное нестационарное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами: $A = -c^2$, $B = 0$, $C = 1$, $D = E = F = G \equiv 0$. Оно называется волновым уравнением. Описывает распространение звуковых волн и т.п. Это уравнение *гиперболического типа*, так как $B^2 - AC = c^2 > 0$.

3. Линейное одномерное нестационарное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, где $A = -a^2$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $F = 0$, $G \equiv 0$, $E = 1$. Это одномерное *уравнение теплопроводности.* Уравнение *параболического типа*, так как $B^2 - AC = 0$.

4. Линейное двумерное стационарное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, где $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $D = E = F = G \equiv 0$. Это двумерное *уравнение Лапласа.* Поскольку $B^2 - AC = -1 < 0$, то это уравнение эллиптического типа при всех x и y.

5. Это *квазилинейное одномерное нестационарное уравнение третьего порядка.*

6. Линейное одномерное нестационарное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, где $A = 3$, $B = \frac{7}{2}$, $C = 2$, $D = E = F = G \equiv 0$. Это уравнение *гиперболического типа*, поскольку $B^2 - AC = \frac{49}{4} - 6 > 0$ при всех x и t.

2.3.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка

Это уравнение определяется соотношением вида:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=0, \qquad (2.20)$$

где $x_1, x_2,...,x_n$ — независимые переменные;

$u\ (x_1, x_2,...,x_n)$ — неизвестная функция;

$\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ — её частные производные;

$A_i = A_i(x_1, x_2,...,x_n)$ — коэффициенты, не зависящие от u.

Будем считать, что уравнение (2.20) рассматривается в некоторой области D переменных $x_1, x_2,...,x_n$, а коэффициенты уравнения

1) непрерывно дифференцируемы в области D;
2) не обращаются одновременно в нуль ни в одной точке из области D, т.е.

$$\sum A_i^2(x_1,...,x_n)>0 \ (x_1, x_2,...,x_n)\in D.$$

Решением уравнения (2.20) будет любая непрерывно дифференцируемая в области D функция $u = u(x_1, x_2,...,x_n)$, обращающая его в тождество.

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=0\ \forall\ (x_1, x_2,...,x_n)\in D.$$

(любое x из множества D)

- *Геометрическая интерпретация* решения данного дифференциального уравнения: это интегральная поверхность для данного уравнения — гладкая n-мерная поверхность в пространстве $0x_1,...,x_n, u$.
- Линейное однородное дифференциальное уравнение всегда имеет решение $u = C$, где C — любое постоянное число. Такие решения называются *очевидными* и не подлежат обсуждению.

- Для дифференциального уравнения *с двумя независимыми переменными:*

$$P(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}=0. \qquad (2.21)$$

Решение $u=f(x, y)$ представляет собой в пространстве $0xyu$ просто некоторую гладкую *двумерную поверхность*.

- **Характеристическая система и характеристики.**

Характеристическая система для уравнения (2.20) — это система *обыкновенных* дифференциальных уравнений (ОДУ) в *симметрической* форме.

$$\frac{dx_1}{A_1(x_1,...,x_n)}=...=\frac{dx_n}{A_n(x_1,...,x_n)},$$

а при ее эквивалентной записи в *параметрической форме*, имеющей вид:

$$\frac{dx_i}{dt}=A_i(x_1,...,x_n),\ i=1,\ 2,...,\ n,$$

где t — независимая параметрическая переменная.

Характеристики этого уравнения (2.20) — это его решения (интегральные кривые).

В условиях, оговоренных для уравнения (2.20) характеристическая система удовлетворяет теореме существования и единственности решений. Поэтому через каждую точку области D проходит единственная характеристика уравнения (2.20), которую в параметрической форме можно представить в виде n функций.

$$x_i=x_i(t),\ i=1,\ 2,\ldots,\ n.$$

В случае уравнения (2.21) с двумя независимыми переменными его характеристическая система в симметрической форме вырождается в одно обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{P(x,y)}=\frac{dy}{Q(x,y)},\ \text{или}\ Q(x,y)dx-P(x,y)dy=0.$$

А в параметрической форме приобретает вид автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases}$$

Соответствующая ей характеристика может быть записана с помощью двух функций:

$$x = x(t); \; y = y(t). \tag{2.22}$$

- *Первый интеграл* характеристической системы уравнения (2.20) — это отличная от константы непрерывно дифференцируемая в области D функция $g(x_1,\ldots,x_n)$, которая на любой характеристике (2.22) данного уравнения при подстановке в качестве аргументов $x_1,\ldots,x_n$ соответствующих выражений $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ имеет постоянное значение $g(x_1(t),\ldots,x_n(t)) = C \; \forall \; (x_1,\ldots,x_n) \in D$, где C — константа.

Теорема 1. *Если $u = f(x_1,\ldots,x_n)$ — решение уравнения (2.20), то функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ является первым интегралом для характеристической системы данного уравнения. Обратно, если функция $g(x_1,\ldots,x_n)$ служит первым интегралом характеристической системы уравнения (2.20), то и $u = g(x_1,\ldots,x_n)$ есть решение этого уравнения.*

- **Задача Коши для линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка.**

Задача Коши — это одна из трех основных типов задач с дифференциальными уравнениями в частных производных, содержащих дифференциальные уравнения и дополнительные условия, позволяющие выделить искомые частные решения среди целого семейства решений.

В случае задачи Коши решение уравнения ищется удовлетворяющим заданным *начальным условиям*.

Постановка задачи для уравнений первого порядка

Пусть имеется линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=0, \qquad (2.23)$$

в котором, без ограничения общности, положим:

$$A_1(x_1,\ldots,x_n)\neq 0\ \forall\ (x_1,\ldots,x_n)\in D.$$

В этом случае задача Коши ставится так:

Среди всех решений уравнения (2.23) выделить такое решение $u=f(x_1,\ldots,x_n)$ (2.24), которое удовлетворяет начальному условию:

$$u\Big|_{x_1=x_1^0}=\varphi(x_2,...,x_n), \qquad (2.25)$$

где x_1^0 — заданное число, а $\varphi(x_2,\ldots,x_n)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов.

При данной постановке задачи Коши, естественно, полагается, что в $(n+1)$-мерном пространстве $0x_1,\ldots,x_n u$ соответствующая n-мерная плоскость $x_1=x_1^0$ пересекается с областью D. Речь идет о построении в этом пространстве n-мерной интегральной поверхности, описываемой уравнением (2.24), проходящей через заданную гладкую $(n-1)$-мерную поверхность $u=\varphi(x_2,\ldots,x_n)$, $x_1=x_1^0$.

Если подобная задача Коши рассматривается для уравнения с двумя независимыми переменными

$$P(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad (2.26)$$

с начальным условием $u_{x=x^0}=\varphi(y)$ (2.27), то в ней требуется найти решение $u=f(x,y)$, для которого изображающая в пространстве $0xyu$ интегральная поверхность будет проходить (в плоскости $x=x^0$) через заданную кривую.

$$u=\varphi(y),\qquad x=x^0.$$

Пусть $\qquad g_1(x_1,...,x_n),...,g_{n-1}(x_1,...,x_n)$ — $\qquad$ (2.28)
независимые первые интегралы для характеристической

системы уравнения (2.23), причем положим, что для них выполняется условие:

$$\frac{\partial(g_1,\ldots,g_{n-1})}{\partial(x_2,\ldots,x_n)} \neq 0 \ \forall\ (x_1,\ldots,x_n) \in D.$$

Алгоритм решения задачи Коши:

1. Составить систему равенств с произвольными параметрами $c_1,\ldots,c_{n-1}$, подставляя $x_1 = x_1^0$ в первые интегралы (2.28)

$$\begin{cases} g_1(x_1^0, x_2,\ldots,x_n) = c_1, \\ g_2(x_1^0, x_2,\ldots,x_n) = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_{n-1}(x_1^0, x_2,\ldots,x_n) = c_{n-1}. \end{cases} \qquad (2.29)$$

2. Найти выражения для переменных $x_2,\ldots,x_n$, решая систему (2.25) с соответствующими гладкими функциями.

$$\begin{cases} x_2 = p_2(c_1,\ldots,c_{n-1}), \\ x_3 = p_3(c_1,\ldots,c_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = p_n(c_1,\ldots,c_{n-1}). \end{cases} \qquad (2.30)$$

3. Подставив выражения (2.30) в функцию $\varphi(x_2,\ldots,x_n)$, задающую начальное условие (2.25), составить формулу:

$$u = \varphi\left[(p_2(c_1,\ldots,c_{n-1}),\ldots, p_n(c_1,\ldots,c_{n-1})\right] \qquad (2.31)$$

и положить в ней

$$\begin{cases} c_1 = g_1(x_1, x_2,\ldots,x_{n-1}, x_n), \\ c_2 = g_2(x_1, x_2,\ldots,x_{n-1}, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n-1} = g_{n-1}(x_1, x_2,\ldots,x_{n-1}, x_n). \end{cases} \qquad (2.32)$$

Для уравнения (2.26) с условием (2.27) характернстическая система характеризуется лишь *одним* первым интегралом вида $g(x, y)$, система (2.29) сводится к *одному* уравнению $g(x^0, y)=c$, система (2.30) перейдет в *одно* равенство $y=p(c)$, а из соотношений (2.31), (2.32) вытекает единая формула для искомого решения задачи Коши:

$$u=\varphi\left[p(g(x,y))\right].$$

◆ Пример 2.131

Поставить задачу Коши для одномерного дифференциального уравнения первого порядка (уравнение переноса).

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=0 \qquad (*) \qquad 0<x<L$$

$$0<t<T$$

Это уравнение описывает конвективный одномерный перенос тепла и является модельным для некоторых процессов в механнке сплошных сред.

Решение:

Таким образом, задается область $D(0, L)\times(0, T)$, ограниченная прямоугольником с длиной L, высотой T (рис 2.19).

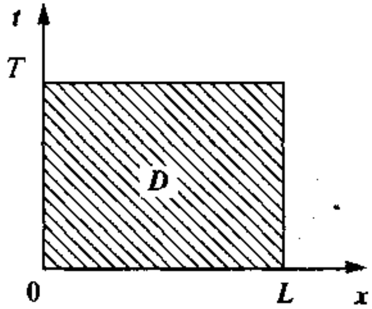


Рис. 2.19

Здесь $x=0$ и $x=L$ — левый и правый концы отрезка изменения пространственной переменной; $t=0$, $t=T$ — моменты начала и окончания процесса. $-\infty<x<+\infty$, $0<t<T$.

Задача Коши $\quad u'_t+u'_x=0 \qquad -\infty<x<+\infty$

$$0<t<T;$$

$u(x,0) = \psi(x)$, $-\infty < x < +\infty$ (начальное условие) содержит только функциональное начальное условие (при $t = 0$) и рассматривается в бесконечной области изменения пространственной переменной. Теперь надо найти функцию $u(x, t)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.10) в области D и соответствующим условиям на ее границе.

◆ Пример 2.132

Для уравнения $y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ найти общее решение.

Решение:

Будем рассматривать данное уравнение на всей плоскости независимых переменных x, y, где только исключим точку $x = 0$, $y = 0$ согласно нашим требованиям к коэффициентам линейного однородного уравнения.

Характеристическая система в симметрической форме определяется одним обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка

$$xdx + ydy = 0.$$

Интегрируя его, получим $x^2 + y^2 = C$, где C — произвольная постоянная ($C > 0$).

Отсюда следует, что первый интеграл для характеристической системы данного уравнения задается функцией $g(x, y) = x^2 + y^2$, а его общее решение записывается в явном виде $u = \phi(x^2 + y^2)$, где ϕ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция своего одного аргумента.

Геометрическая интерпретация — это на плоскости $0xy$ однопараметрическое семейство концентрических окружностей с центрами в начале координат. При этом в пространстве $0xyu$ функцией ϕ задается интегральная поверхность, являющаяся поверхностью вращения вокруг оси $0u$.

◆ Пример 2.133

Для уравнения $y\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ решить задачу Коши с начальным условием $u_{x=1}=\sqrt{1+y^2}=\varphi(y)$.

Решение:

Согласно требованиям к задаче Коши для линейного однородного уравнения, из плоскости независимых переменных Oxy исключим уже целую прямую $y=0$.

Из примера 2.132 следует, что общее решение уравнения имеет вид $u=\phi(x^2+y^2)$, где ϕ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, а выражением $g(x,y)=x^2+y^2$ определяется первый интеграл соответствующего характеристического уравнения.

Согласно начальному условию подставим $x=1$ в первый интеграл.

Получим $x^2+y^2\Big|_{x=1}=C$, где C — параметр.

Отсюда $1+y^2=C\Rightarrow y=\sqrt{C-1}$ $(C>1)$.

Подставим найденное значение y в функцию $\varphi(y)$ и получим:

$$u=\sqrt{1+y^2}=\sqrt{1+C-1}=\sqrt{C}.$$

Заменим C выражением для $g(x, y)$, делаем вывод, что решением рассматриваемой задачи Коши служит функция $u=\sqrt{x^2+y^2}$.

Геометрическая интерпретация: в пространстве $0xyu$ этой функцией $u=\sqrt{x^2+y^2}$ задается интегральная поверхность, являющаяся верхней частью прямого кругового конуса с вершиной в начале координат и осью вращения $0u$, проходящей в плоскости $x=1$ через заданную кривую $u=\sqrt{x^2+y^2}$, которая представляет собой ветвь равнобочной гиперболы $u^2-y^2=1$.

Задания для самостоятельного решения

299. Для $y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0$ $(y>0)$ решить задачу Коши с начальным условием $u\Big|_{x=0}=2y^2$.

2.3.3. Дифференциальные уравнения второго порядка с частными производными

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях упругой струны, натянутой вдоль оси $0x$, закрепленной на концах. Пусть в какой-то момент времени струна выводится из состояния покоя каким-либо внешним воздействием (например, щипок). Возникают свободные колебания струны. Предположим, что каждая точка струны отклоняется по перпендикуляру к оси $0x$, и все эти перпендикуляры лежат в одной плоскости. Кроме того, это «малые» колебания струны, т.е. угол между касательной к струне и осью $0x$ остается все время малым.

Пусть $u(x, t)$ — смещение точки струны с абсциссой x в любой момент времени t. Тогда уравнение свободных малых колебаний струны имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.33}$$

где a^2 — постоянная определяющаяся натяжением и материалом струны.

(2.33) — *одномерное волновое уравнение* — это линейное, однородное, дифференциальное уравнение второго порядка с частными производными.

Для полного определения движения струны зададим:

- *граничные (краевые) условия*, показывающие, что делается на концах струны при $x=0$ и $x=l$, каково смещение u.

$$u(0, t)=0 \tag{2.34}$$

$$u(l, t)=0; \tag{2.35}$$

- *начальные условия*, описывающие состояние струны в начальный момент при $t = 0$. Пусть в этот момент струна имеет определенную форму, которая описывается функцией $f(x)$.

  Таким образом, $u(x, 0) = f(x)$. (2.36)

  И пусть в этот момент $t = 0$ скорость в каждой точке струны определяется функцией $\varphi(x)$.

  Таким образом, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x)$. (2.37)

Решение волнового уравнения методом Фурье

Метод Фурье — это метод разделения переменных. При этом находят частные решения уравнения (2.33), удовлетворяющие пока что только граничным условиям (2.34), (2.35).

Разделим переменные. Для этого функцию $u(x, t)$ запишем в виде произведения двух функций, каждая из одной переменной:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t).$$

Подставим эту функцию в уравнение (2.33):

$$X(x) \cdot T''(t) = a^2 X''(x) T(t) \text{ или } \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Видим, что после разделения переменных левая часть не зависит от x, а правая — от t. Следовательно, обе части равенства не зависят ни от x, ни от t, т.е. являются постоянными.

Обозначим эту постоянную $-\lambda^2$.

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

или получаются два уравнения:

$$T''(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Из этих уравнений находим:

$$T(t) = A\cos\lambda at + B\sin\lambda at,$$

$$X(x) = C\cos\lambda x + D\sin\lambda x.$$

Смещение $u(x, t)$ примет вид:

$$u(x,t) = (A\cos\lambda at + B\sin\lambda at)(C\cos\lambda x + D\sin\lambda x).$$

Теперь положим $x = 0$. Получим

$$u(0,t) = (A\cos\lambda at + B\sin\lambda at)C \equiv 0.$$

Значит $C = 0$.

Теперь положим $x = l$.

$$u(l,t) = (A\cos\lambda at + B\sin\lambda at)D\sin\lambda l \equiv 0.$$

Следовательно, $\sin\lambda l = 0$, $\lambda l = k\pi$, $\lambda = \frac{k\pi}{l}$.

Эти значения λ называют *собственными значениями* для данной краевой задачи, а соответствующие им функции $X(x) = D\sin\frac{k\pi}{l}x$ — *собственными функциями.*

Итак, частное решение волнового уравнения, удовлетворяющее данным граничным условиям (2.34) и (2.35) имеет вид:

$$u(x,t) = (A\cdot D\cos\frac{k\pi a}{l}t + B\cdot D\sin\frac{k\pi a}{l}t)\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Заменим $AD = a_k$, $BD = b_k$

$$u_k(x,t) = (a_k\cos\frac{k\pi a}{l}t + b_k\sin\frac{k\pi a}{l}t)\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Сумма решений уравнения (2.33) также будет решением, так как это однородное линейное уравнение:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{k\pi a}{l}t + b_k\sin\frac{k\pi a}{l}t)\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Рассмотрим первое начальное условие (2.36):

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}a_k\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Это разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам.

Следовательно, коэффициент a_k имеет вид:

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\ k = 1, 2, \ldots \qquad (2.38)$$

Коэффициент b_k найдем из второго начального условия, которое описвается уравнением (2.37):

$$u_t'(x,0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}b_k \cdot \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Следовательно, $\frac{k\pi a}{l}b_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$ и

$$b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx. \qquad (2.39)$$

Окончательный вид решения волнового уравнения (2.33) имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{k\pi a}{l}t + b_k\sin\frac{k\pi a}{l}t)\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

◆ Пример 2.134

Струна, закрепленная на концах $x = 0$, $x = l$, имеет в начальный момент $t = 0$ форму параболы $u = \frac{4h}{l^2}x(l-x)$ (рис 2.20). Начальные скорости отсутствуют. Смещение точек струны от оси абсцисс имеет вид ...

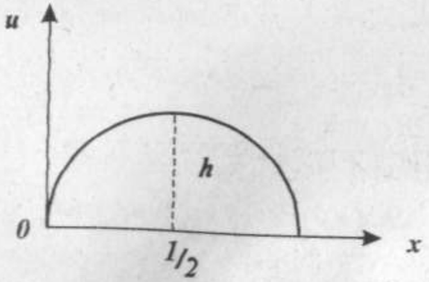


Рис. 2.22. Струна, закрепленная на концах

Решение:

Запишем начальные условия:

$$u(x,0) = f(x) = \frac{4h}{l^2} x(l-x),$$

$$\varphi(x) = 0.$$

Найдем коэффициенты a_k и b_k ряда Фурье, определяющего решение волнового уравнения по формулам (2.38) и (2.39).

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{8h}{l^3}\int_0^l \underbrace{(lx-x^2)}_{u}\underbrace{\sin\frac{k\pi x}{l}dx}_{dV} =$$

$$= -\frac{8h}{l^3}(lx-x^2)\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\bigg|_0^l + \frac{8h}{k\pi l^2}\int_0^l (l-2x)\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}dx =$$

$$= \frac{8h}{k\pi l^2}\int_0^l (l-2x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx =$$

$$= \frac{8h}{k^2\pi^2 l}(l-2x)\sin\frac{k\pi x}{l}\bigg|_0^l + \frac{16h}{k^2\pi^2 l}\int_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}dx =$$

$$= -\frac{16h}{k^3\pi^3}\cos\frac{k\pi x}{l}\bigg|_0^l = -\frac{16h}{k^3\pi^3}(\cos k\pi - 1) =$$

$$= \frac{16h}{k^3\pi^3}\cdot[1-(-1)^k].$$

$b_k = 0; k = 1, 2, \ldots$

При $k = 2n$ $a_k = 0$.

Окончательно

$$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cdot\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

2.4. Ряды

2.4.1. Числовые ряды

Числовой ряд — это выражение вида:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{2.40}$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ называются *членами ряда*. Они образуют бесконечную последовательность.

Общий член ряда — это член a_n с произвольным номером.

Сокращенно ряд обозначают следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Частичные суммы ряда — это суммы конечного числа членов ряда.

$$S_1 = a_1, \qquad S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \qquad S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Частичные суммы ряда образуют бесконечную последовательность частичных сумм: $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$

Сходящийся ряд — это ряд, у которого последовательность его частичных сумм имеет конечный предел при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Сумма ряда — это число S, к которому сходится эта последовательность частичных сумм:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ряд называется **расходящимся**, если такой предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или бесконечен.

◆ Пример 2.135

Исследовать на сходимость ряд, составленный из членов геометрической прогрессии:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots$$

Причем $|q|<1$. Данный ряд …

Решение:

Подсчитаем:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}.$$

Посмотрим, существует ли предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1 - q} \qquad (|q| \le 1).$$

Существует. Следовательно, данный ряд сходится.

◆ Пример 2.136

Исследовать на сходимость ряд $1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$ Данный ряд …

Решение:

Так как $S_n = n$ и $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Ряд расходится.

◆ Пример 2.137

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Данный ряд …

Решение:

Очевидно, что $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ $\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

Поэтому

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Этот предел существует, и ряд сходится.

◆ Пример 2.138

Сумма ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}+...$ равна ...

Варианты ответов: 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 4.

Решение:

Члены данного ряда образуют геометрическую прогрессию, знаменатель которой $q=\frac{1}{2}$. Тогда n-й частичной суммой будет сумма n первых членов этой прогрессии.

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2^n}-1}{\frac{1}{2}-1}.$$

По определению суммы ряда:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}-1}{\frac{1}{2}-1}=2.$$

Или можно воспользоваться формулой из примера 2.135:

$$S=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

◆ Пример 2.139

Сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+... \text{ равна ...}$$

Варианты ответов: 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 4.

Решение:

По определению частичной суммы имеем:

$$S_1=a_1=\frac{1}{2},\qquad S_2=a_1+a_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3},$$

$$S_3=a_1+a_2+a_3=\frac{2}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4},$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}.$$

Получаем последовательность частичных сумм:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

Эту последовательность можно представить в виде:

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2}, \quad S_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3},$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно,

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Или воспользоваться методом решения примера 2.137.

2.4.2. Основные свойства рядов

Остаток ряда после *m*-го члена или остаток *m* — это ряд, полученный из ряда (2.40) путем отбрасывания конечного числа первых m членов.

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k} + \ldots \qquad (2.41)$$

Теорема 1. *Если у сходящегося ряда отбросить конечное число его членов, то полученный ряд также будет сходиться. Верно и обратное утверждение: если сходится ряд, полученный отбрасыванием конечного числа членов у данного ряда, то и данный ряд также сходится.*

Или можно проще сформулировать эту теорему:

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится или расходится одновременно с любым своим m-м остатком.*

Итак, если сходится ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1} + a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (2.40)$$

то сходится ряд $a_{m+1} \ldots + a_{n-1} + a_n + \ldots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$, (2.41)

и обратно, если сходится ряд (2.41), то сходится и ряд (2.40).

Другими словами, на сходимость ряда не влияет отбрасывание любого конечного числа его первых членов.

Теорема 2. *Пусть ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится и его сумма равна* S.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots$, *где* c *— произвольное число также сходится, причем его сумма равна* cS.

Теорема 3. *Пусть ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся и их суммы соответственно равны* S_1 *и* S_2. *Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots$ *также сходится, причем его сумма равна* $S_1 \pm S_2$.

2.4.3. Необходимый признак сходимости

Теорема 4. *(Необходимый признак сходимости ряда).*

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то общий член ряда* a_n *стремится к нулю при неограниченном возрастании n (при* $n \to \infty$*).*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0. \qquad (2.42)$$

Это условие является лишь *необходимым*, но не *достаточным* условием сходимости ряда.

Следствие: Если общий член a_n *ряда (2.40), при* $n \to \infty$ *не стремится к нулю, то такой ряд расходится.*

Если $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.* (2.43)

◆ Пример 2.140

Исследовать на сходимость ряд, составленный из членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q|>1$ и первым членом, $a \neq 0$.

$$a+aq+aq^2+...+aq^{n-1}+...$$

Данный геометрический ряд …

Решение:

Расходится, так как $|q|^n>1$ для $n = 1, 2, 3,\ldots$, т.е. q^n не стремится к нулю при $n \to \infty$.

◆ Пример 2.141

Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1000n+5}$. Исследовать ряд на сходимость.

Ряд …

Решение:

Используем условие (2.42) — необходимый признак сходимости ряда.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{1000n+5}.$$

Этот предел должен быть равен нулю, если ряд сходится. Подсчитаем его.

Разделим числитель и знаменатель дроби на n.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1000+\frac{5}{n}}=\frac{1}{1000}.$$

Условие (2.43) выполняется. Следовательно, ряд расходится.

◆ Пример 2.142

Исследовать ряд на сходимость.

Дан ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+...+\frac{n}{n+1}+...$

Ряд …

Решение:

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$ — предел отличен от нуля. Следовательно, данный ряд расходится.

◆ Пример 2.143

Исследовать ряд на сходимость. Дан гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Ряд …

Решение:

Ряд расходится.

Гармонический ряд является частичным случаем ряда Дирихле.

Ряд Дирихле — это ряд вида

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots,$$

где $p > 0$. Этот ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $0 < p \leq 1$.

Воспользовавшись условием (2.42), видим, что необходимое условие сходимости выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, однако это *необходимое*, но не *достаточное* условие сходимости ряда. Докажем, что этот ряд расходится.

$$\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0, \qquad (2.44)$$

но $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} =$

$$= n \cdot \frac{1}{2n} > \frac{1}{2},$$

т.е. $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$.

Отсюда следует, что равенство (2.44) невозможно и, следовательно, данный гармонический ряд расходится.

Таким образом, если общий член ряда стремится к нулю, то окончательный вывод о сходимости ряда делать рано. Необходимо дополнительное исследование с помощью **достаточных признаков сходимости ряда**.

2.4.4. Признаки сходимости рядов с положительными членами

Положительный ряд — это ряд, члены которого положительны.

Пусть ряд (2.40) $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ будет положительный, т.е. $a_n > 0$ ($n = 1, 2, ...$). Тогда очевидно $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$ ($n = 1, 2, ...$), т.е. последовательность $S_1, S_2, ..., S_n$ является неубывающей.

Теорема 5. *Для того, чтобы положительный ряд (2.40) сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограничена сверху.*

Теорема 6. *1-й признак сравнения рядов.*

Пусть даны два положительных ряда:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } b_1 + b_2 + ... + b_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

И для всех n, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $a_n \leq b_n$, т.е. члены одного ряда не превосходят соответствующих членов другого ряда, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

При исследовании рядов на сходимость и расходимость по этому признаку часто используется:

- геометрическая прогрессия

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots \ (a > 0),$$

которая сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$;

- гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится.

◆ Пример 2.144

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$. Ряд …

Решение:

Сравним этот ряд со сходящимся рядом (пример 2.137).

Имеем $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Согласно теореме 6 получаем, что данный ряд сходится.

◆ Пример 2.145

Исследовать ряд на сходимость.

Дан гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$. Ряд …

Решение:

Сравиим этот ряд с рядом из членов ряда сходящейся геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{2^{n+1}} \ \left(q = \frac{1}{2} < 1\right).$$

Члены даиного ряда не больше членов ряда сходящейся геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

Теорема 7. *2-й признак сравнения.*

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *— ряды с положительными членами, причем существует конечный и отличный от нуля предел* $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$*, тогда ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

При использовании этих двух признаков сравнения часто сравнивают исходный ряд с соответствующим рядом Дирихле. При этом часто используется эквивалентность следующих малых последовательностей:

$$\sin\frac{1}{n} \sim tg\,\frac{1}{n} \sim \arcsin\frac{1}{n} \sim arctg\,\frac{1}{n} \sim \ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}.$$

◆ Пример 2.146

Исследовать ряд на сходимость. Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^m}$ $(m \le 1)$.

Ряд …

Решение:

Сравним члены этого ряда с членами гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится. Видим, что $\frac{1}{n} \le \frac{1}{n^m}$. Следовательно, данный ряд расходится.

Признак Даламбера

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *с положительными членами. Если для этого ряда существует конечный предел* $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = p$*, то при* $p < 1$ *ряд сходится, а при* $p > 1$ *— расходится. (При* $p = 1$ *вопрос о сходимости ряда остается нерешенным. В этом случае требуется исследовать ряд с помощью других методов.)*

◆ **Пример 2.147**

Исследовать ряд на сходимость. Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$. Ряд ...

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$ Ряд сходится.

◆ **Пример 2.148**

Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Даламбера.

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{3^{n+5}}$. Ряд ...

Решение:

Преобразуем выражение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^5\cdot 3^{n+1}}{3^{n+1+1}n^5}=\frac{(n+1)^5}{n^5}\cdot\frac{3^{n+1}}{3^{n+2}}=\frac{(n+1)^5}{n^5}\cdot\frac{3^{n+1}}{3^{n+2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^5,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5=\frac{1}{3}<1.$$

Ряд сходится по признаку Даламбера.

◆ **Пример 2.149**

Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Даламбера.

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$. Ряд ...

Решение:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!n^n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}=$$

$$= \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{n^n} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n(n+1)} =$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$ (это 2-й замечательный предел).

Исходный ряд расходится.

Признак Коши

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами. Если для этого ряда существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то при $q < 1$ ряд сходится, а при $q > 1$ — расходится. (При $p = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.)

◆ Пример 2.150

Исследовать ряд на сходимость. Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n (5+n)}$. Ряд ...

Решение:

Согласно признаку Коши:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n (5+n)}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln(5+n)} = 0 < 1.$$

Ряд сходится.

◆ Пример 2.151

Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Коши.

Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3n+1}$. Ряд ...

Решение:

$$\sqrt[n]{a^n}=\sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3n+1}}=\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{\frac{3n+1}{n}}=\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3+\frac{1}{n}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3+\frac{1}{n}}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}<1.$$

Исходный ряд сходится.

Интегральный признак сходимости

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ — ряд с положительными членами, для которого существует положительная, непрерывная и монотонно убывающая на промежутке $[1,+\infty)$ функция $f(x)$ такая, что $f(n)=a_n$, где $n=1, 2, \ldots$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

◆ Пример 2.152

Исследовать ряд на сходимость.

$1+\frac{1}{2^{5/4}}+\frac{1}{3^{5/4}}+\ldots+\frac{1}{n^{5/4}}+\ldots$ Ряд …

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$, $x\geq 1$ — это непрерывная, монотонно убывающая функция.

$f(n)=\frac{1}{n^{\alpha}}$ — следовательно, можно применить интегральный признак.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^M =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \left(\frac{1}{1-\alpha} (M^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}) \right) = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{M\to\infty} (M^{1-\alpha} - 1).$$

У нас $1-\alpha < 0$, т.е. $\alpha - 1 > 0$ $\frac{5}{4} - 1 > 0$.

Следовательно, $M^{1-\alpha} = \frac{1}{M^{\alpha-1}} \to 0$.

Тогда $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}(0-1) = \frac{1}{\alpha-1}$ при $\alpha > 1$

(у нас $\alpha = \frac{5}{4} > 1$) ряд сходится.

Задания для самостоятельного решения

300. Формула частичной суммы S_n имеет вид:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + \ldots$$

Варианты ответов:

1) n; 2) n^2; 3) n^3; 4) 0.

- Найти предел частичной суммы ряда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ и сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

301. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + \ldots$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ldots$ Ряд…

302. $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} + \ldots$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ldots$ Ряд …

303. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ldots$ Ряд …

304. $\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+...+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+...$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = ...$ Ряд ...

- Исследовать ряд на сходимость, применяя 1-й признак сравнения:

305. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn+1}{n^2}$. Ряд ...

306. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+1}{2^n}$. Ряд ...

307. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$. Ряд ...

- Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Даламбера. Указать $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

308. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$. Ряд ... $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=...$

309. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$. Ряд ... $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=...$

310. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$. Ряд ... $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=...$

311. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Ряд ... $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=...$

312. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot ...\cdot(3n-2)}{n!\cdot 2^n}$. Ряд ... $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=...$

▸ Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Коши. Указать $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$:

313. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Ряд … $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\ldots$

314. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{n}$. Ряд … $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\ldots$

315. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$. Ряд… $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\ldots$

316. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^{n}$. Ряд … $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\ldots$

317. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^{n}$. Ряд … $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\ldots$

▸ Исследовать ряд на сходимость. Дан ряд:

318. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$. Ряд …

319. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$. Ряд …

320. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{15}}{n!}$. Ряд …

321. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^{n}$. Ряд …

322. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n}{n+3}\right)^{n}$. Ряд …

323. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. Ряд …;

324. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{4^n(5n+4)}$. Ряд …

325. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{5^n\cdot n!}$. Ряд…

2.4.5. Знакопеременные ряды

Знакопеременные ряды — это ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены.

Пусть дан знакопеременный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (2.45)$$

С каждым таким рядом связан ряд с неотрицательными членами, составленный из модулей членов данного ряда, т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

Теорема 8. *Если сходится ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *то сходится и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Абсолютная сходимость: знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из модулей его членов.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

◆ **Пример 2.153**

Доказать, что ряд $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} + \ldots$ абсолютно сходится.

Решение:

Ряд, составленный из модулей его членов

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots,$$

является сходящимся, как рассматривалось выше по признаку Даламбера, так как

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Свойства абсолютно сходящихся рядов

1. Если два ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно, то при любых α и β ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n)$ сходится абсолютно.

2. Если ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то ряд, составленный из тех же членов, но взятых в другом порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна сумме первого ряда.

Условная сходимость: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \cdots$, составленный из модулей его членов, расходится.

Для ответа на вопрос об абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ можно применять все рассмотренные выше признаки, используемые при сравнении рядов с положительными членами.

Из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходимость данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, вообще говоря, не следует.

Однако, если применить к ряду, составленному из модулей, признак Даламбера (или признак Коши), получаем предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = p > 1$$

(или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l > 1$), то в этом случае оба ряда: и исходный $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, и ряд, составленный из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, — расходятся.

Знакочередующийся ряд — это ряд, в котором положительные и отрицательные члены следуют друг за другом поочередно.

Например, это ряд вида:

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots, \tag{2.46}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — положительные числа.

Для **знакочередующихся** рядов имеет место следующий достаточный признак сходимости.

Признак Лейбница. *Ряд (2.46) сходится, если его члены монотонно убывают по абсолютной величине*

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$$

и общий член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

◆ Пример 2.154

Пользуясь признаком Лейбница, исследовать на сходимость знакочередующийся ряд:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Этот ряд ...

Решение:

Члены этого ряда монотонно убывают по абсолютной величине $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots$ и общий член ряда при $n \to \infty$ стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Ряд сходится.

Алгоритм исследования на сходимость знакопеременных рядов

1. Исследовать на сходимость ряд, составленный из модулей членов данного ряда, используя какой-либо признак сравнения.

2. Сделать вывод об абсолютной или условной сходимости этого ряда.

3. Выяснить, сходится ли данный знакочередующийся ряд, применяя признак Лейбница. Для этого:

- проверить, выполняется ли неравенство $a_n > a_{n+1}$ для абсолютных величин членов ряда;
- найти предел общего члена ряда.

4. Сделать вывод о сходимости данного исходного ряда.

◆ Пример 2.155

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2\sqrt{n}-1}.$$

Решение:

1. Исследуем на сходимость ряд, составленный из модулей членов данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}-1}$.

Сравним этот ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$. Этот ряд расходится, так как расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ (как ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ при $p=\frac{1}{2}<1$). Следовательно, по 1-му признаку сравнения расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}-1}$.

2. Исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

3. Выясним, сходится ли данный знакочередующийся ряд, используя признак Лейбница.

- Проверим выполнение неравенства $a_n > a_{n+1}$;
- $a_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n}-1} > \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}-1} = a_{n+1}$.

Данное неравенство эквивалентно неравенству

$$2\sqrt{n}-1 < 2\sqrt{n+1}-1,$$

которое верно для любого $n = 1, 2, \ldots$ Следовательно, неравенство выполняется для всех n

$$a_n > a_{n+1} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

- Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}+1} = 0.$$

4. Таким образом, для данного знакочередующегося ряда выполнены оба условия, содержащиеся в признаке Лейбница. Это означает, что исходный ряд сходится. Однако данный ряд сходится условно.

◆ Пример 2.156

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n}{3^n}$.

Решение:

1. Исследуем на сходимость ряд, составленный из модулей членов данного ряда, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^n}$.

Для этого используем признак Даламбера.

Найдем выражение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{3^n}{3^{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{3}$$

и найдем предел этого выражения:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

2. Ряд, составленный из модулей, сходится, а следовательно, и исходный ряд сходится абсолютно.

Задания для самостоятельного решения

- Исследовать ряды на сходимость.
- Указать применяемые признаки.
- Указать:

1) для необходимого признака $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

2) для 1-го и 2-го признаков сравнения — общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд;

3) для признака Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$;

4) для признака Коши $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

326. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{3n+1}{3n-1}$;

327. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \dfrac{(2n)!}{4^n \cdot n!}$;

328. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \dfrac{1}{3n-1}$;

329. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln^n \dfrac{2n}{n+2}$;

330. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\sin n}{n^2}$;

331. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln 2$;

332. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n^2}{2^n}$.

2.4.6. Функциональные ряды

Функциональный ряд — это выражение вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \qquad (2.47)$$

где $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ — члены ряда — некоторая последовательность функций от x.

Если в данном функциональном ряде (2.47) положить $x = x_0$, где x_0 — некоторое число, то получим числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots$$

При одних значениях x ряд может сходиться, а при других — расходиться.

- Функциональный ряд (2.47) называется *сходящимся в точке x_0*, если при $x = x_0$ он обращается в сходящийся числовой ряд.

Если же при $x = x_0$ получается расходящийся числовой ряд, то ряд (2.47) называется *расходящимся в точке x_0*.

Область сходимости функционального ряда — это совокупность всех значений x, при которых ряд (2.47) сходится.

◆ Пример 2.157

Исследовать на сходимость функциональный ряд

$$\frac{2x-1}{3x+2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)^n + \ldots$$

1. В точке $x = 1$ этот ряд ...
2. В точке $x = -2$ этот ряд ...

Решение:

1. Подставим $x = 1$ и получим числовой ряд

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \ldots$$

Применяя признак Даламбера, получим, что данный ряд сходится.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{5}\right)^n}\right) = \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{5} < 1.$$

2. Подставим $x=-2$. Получим числовой ряд:

$$\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^2+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{5}{4}\right)^n+\ldots$$

Применяя признак Даламбера, получим, что данный ряд расходится.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n+1}\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}\left(\frac{5}{4}\right)^n}\right)=\frac{5}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{5}{4}>1.$$

◆ Пример 2.158

Областью сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

будет …

Решение:

Применяя признак Даламбера к ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, получим, что для любого x:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0<1.$$

Следовательно, ряд сходится на всей числовой оси.

◆ Пример 2.159

Областью сходимости ряда

$$1+(1-x)+(2-x)^2+(3-x)^3+\ldots+(n-x)^n+\ldots$$

будет …

Решение:

Общий член ряда при любом фиксированном $x\in R$ $n-x>1$ не стремится к нулю.

Так как существует такое N для любого x, что при $n > N$ $n - x > 1$.

Ряд расходится на всей числовой оси.

- Из всех функциональных рядов наиболее распространенным на практике являются степенные ряды.

Степенной ряд — это функциональный ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 +$$

$$+ \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots, \qquad (2.48)$$

где x — переменная, x_0 — некоторое число.

Числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ называются коэффициентами ряда.

Если $x_0 = 0$, то ряд примет вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots + a_n x^n + \ldots \quad (2.49)$$

Область сходимости степенного ряда — это совокупность всех значений x, при которых ряд (2.48) сходится.

Радиусом сходимости степенного ряда (2.48) называется число R, если ряд сходится при $|x - x_0| < R$ и расходится при $|x - x_0| > R$.

Для ряда (2.49) это определенне примет вид:

- при $|x| < R$ ряд сходится;
- прн $|x| > R$ ряд расходится.

Интервал сходимости ряда (2.48) — это интервал (x_0–R, x_0+R).

Если $x_0 = 0$, то интервал сходимости (–R; R). Если ряд сходится иа всей числовой прямой, то пишут $R = \infty$. Если ряд сходится только при $x = 0$, то пишут $R = 0$.

Радиус сходимости можно вычислить по одной из существующих формул, если соответствующий предел существует.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ или } R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

◆ Пример 2.160

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+...+\frac{x^n}{n}+...$

Радиус сходимости R равен …

Варианты ответов: 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) ∞.

Решение:

Здесь $a_n=\frac{1}{n}$, $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$. Тогда

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Можно расширить эту задачу и определить область сходимости данного степенного ряда.

Интервалом сходимости будет (–1; 1), так как $x_0=0$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ — это знакочередующийся ряд. Он *сходится* по признаку Лейбница:

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, и модули членов ряда образуют убывающую последовательность $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}<a_n=\frac{1}{n}$.

Подставим $x=1$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ Этот ряд *расходится*.

Следовательно, областью сходимости данного ряда будет полуинтервал [–1; 1).

- Если функция $y=f(x)$ определена в некоторой точке x_0 и имеет производные всех порядков в этой точке, то степенной ряд вида:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=f(x_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (2.50)$$

называется **рядом Тейлора** для функции $f(x)$ в точке x_0.

Если $x_0=0$, то получается ряд:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots, \quad (2.51)$$

который называется **рядом Маклорена**.

Алгоритм представления элементарной функции в виде суммы ряда Тейлора (Маклорена)

1. Вычислить последовательные производные данной функции в точке $x=x_0$.

2. Составить ряд Тейлора (Маклорена) для функции, используя формулу (2.50).

3. Определить промежуток сходимости полученного ряда.

4. В этом промежутке ряд Тейлора (Маклорена) сходится к порождающей его функции $f(x)$, если только все значения $f(x_0), f'(x_0),\ldots, f^{(n)}(x_0)\ldots$ получаются непосредственной подстановкой значения $x=x_0$ в выражения для функции $f(x)$ и ее производных $f'(x),\ldots, f^{(n)}(x)$.

Применяя этот алгоритм, найдем разложение в ряд Маклорена для некоторых элементарных функций.

- Разложение функции $f(x)=e^x$:

1. $f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(n)}(x)=e^x$.

При $x=0$ получаем:

$f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=1$.

2. Составим ряд Маклорена:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \quad (2.52)$$

8. Зак. 649

3. Найдем интервал сходимости ряда

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty.$$

Вывод: ряд абсолютно сходится по всей числовой оси.

4. Покажем, что ряд (2.52) имеет своей суммой $f(x) = e^x$.

Согласно необходимому условию сходимости ряда для любого x справедливо равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

При $n \to \infty$ $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ при любом x.

Следовательно, функция e^x является суммой ряда (2.52).

Таким образом, при любом x имеет место:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

- Выполним подробно по алгоритму разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = \sin x$.

1.

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

....

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

Полагая $x = 0$, получим:

$f(0) = 0,$ $\qquad$ $f'(0) = 1,$

$f''(0) = 0,$ $\qquad$ $f'''(0) = -1,$

$f^{(4)}(0) = 0 \ldots$

2. По формуле (2.51) для функции $\sin x$ составим ряд Маклорена:

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

3. Определяем промежуток сходимости. Исследуем остаточный член ряда:

$$|R_n(x)|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ при любом x.

4. Это означает, что функция $\sin x$ является суммой ряда и имеет место разложение

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

Аналогично выводятся следующие формулы:

- $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$; $(-\infty<x<+\infty)$;
- $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots$
$$+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots\quad(-1<x<1);$$
- $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots\ (-1<x<1);$

- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \quad (-1 < x \le 1).$$

Задания для самостоятельного решения

333. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2} = \frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2^2 x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n^2 x}{n^2} + \ldots$$

Ряд ...

334. Областью сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^n} + \ldots \text{ будет } \ldots$$

335. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ равен...

Варианты ответов: 1) 1; 2) 2; 3) 8; 4) ∞.

336. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{10^n}$ равен...

Варианты ответов: 1) 1; 2) 2; 3) 10; 4) ∞.

337. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!} x^n$ равен...

Варианты ответов: 1) 0; 2) 1; 3) 10; 4) ∞.

338. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}(x-1)^n$ равен...

Варианты ответов: 1) 1; 2) 3; 3) 4; 4) ∞.

339. Область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n^2}$ — это …

340. Область сходимости степенного ряда

$-\frac{x+1}{2}+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 2^2}-\frac{(x+1)^3}{3\cdot 2^3}+\ldots+(-1)^n\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}+\ldots$ — это …

341. Область сходимости степенного ряда

$3x+3^4x^4+3^9x^9+\ldots+3^{n^2}x^{n^2}+\ldots$ — это…

- Разложить в ряд Маклорена:

342. $f(x)=e^{-x^3}$;

343. $f(x)=\ln(1-2x)$;

344. $f(x)=\cos^2 x$.

Глава 3

Основные численные методы

3.1. Численное интегрирование

Не все, даже сравнительно простые функции, могут быть проинтегрированы с помощью элементарных функций. С другой стороны, определенный интеграл от непрерывной функции $y = f(x)$ обязательно существует. Поэтому важное значение имеют методы приближенного вычисления определенного интеграла. Изложим самые простые и очевидные из этих методов, а затем рассмотрим вопрос об оценке погрешности.

Речь идет о вычислении интеграла $\int_a^b f(x)dx$, где $a < b$. Определенный интеграл будем вычислять как площадь криволинейной трапеции.

3.1.1. Формула прямоугольников

Самый простой, но и самый грубый метод приближенного вычисления интеграла, когда площадь криволинейной трапеции заменяется площадью прямоугольника (рис. 3.1).

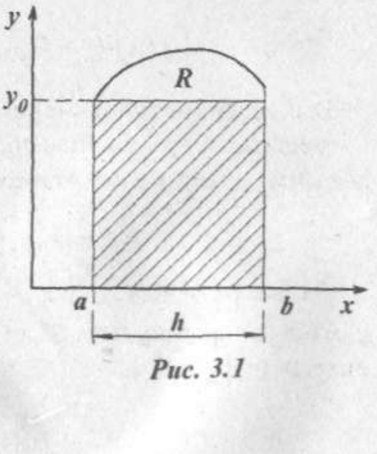


Рис. 3.1

Тогда для вычисления интеграла получаем приближенное выражение:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot y_0.$$

Здесь h — ширина интервала, y_0 — значение функции, вычисленное в нижнем пределе интегрирования.

В общем случае, если интервал $[a, b]$ не является малым, то промежуток от a до b разбивается на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$ и для точек деления $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ вычисляются значения интегрируемой функции $y = f(x)$. Считаем, что $x_0 = a$ и $x_n = b$ (рис. 3.2). Площадь криволинейной трапеции заменяется суммарной площадью полученных прямоугольников.

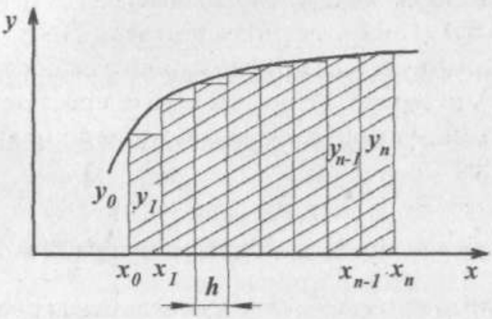


Рис. 3.2

В этом случае для вычисления определенного интеграла получаем приближенное выражение (*формула прямоугольников*):

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}). \tag{3.1}$$

Вычисленное значение тем точнее, чем больше n. Оценка погрешности при вычислении по формуле прямоугольников определяется выражением:

$$R \le \frac{1}{2}\left|f'_{\max}(x)\right| \cdot (b-a) \cdot h, \tag{3.2}$$

Где $x \in [a, b]$, а $\left|f'_{\max}(x)\right|$ — максимальная величина абсолютного значения первой производной во всем интервале интегрирования.

Причем $$\lim_{n\to\infty} R = 0.$$

Вычисление определенных интегралов численными методами на практике проводится с помощью ЭВМ. При этом формулу погрешностей (3.2) не используют, а проводят расчеты, последовательно уменьшая шаг h: т.е. при h, $\frac{h}{2}$, $\frac{h}{4}$,… до тех пор, пока результаты расчетов практически перестанут изменяться.

◆ Пример 3.1

Вычислить по формуле прямоугольников определенный интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$. Оценить погрешность вычислений.

Решение:

Положим $n = 10$, т.е. разбиваем интервал интегрирования от 1 до 2 на десять равных частей.

$$h = \frac{2-1}{10} = 0{,}1.$$

Вычислим значение функции в точках разбиения:

$x_0 = 1$ $\qquad y_0 = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{1} = 1$

$x_1 = 1{,}1$ $\qquad y_1 = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{1{,}1} \approx 0{,}90909$

$x_2 = 1{,}2$ $\qquad y_2 = \frac{1}{x_2} = \frac{1}{1{,}2} \approx 0{,}83333$

$x_3 = 1{,}3$ $\qquad y_3 = \frac{1}{x_3} = \frac{1}{1{,}3} \approx 0{,}76923$

$x_4 = 1{,}4$ $\qquad y_4 = \frac{1}{x_4} = \frac{1}{1{,}4} \approx 0{,}71429$

$$x_5 = 1{,}5 \qquad y_5 = \frac{1}{x_5} = \frac{1}{1{,}5} \approx 0{,}66667$$

$$x_6 = 1{,}6 \qquad y_6 = \frac{1}{x_6} = \frac{1}{1{,}6} = 0{,}625$$

$$x_7 = 1{,}7 \qquad y_7 = \frac{1}{x_7} = \frac{1}{1{,}7} \approx 0{,}58824$$

$$x_8 = 1{,}8 \qquad y_8 = \frac{1}{x_8} = \frac{1}{1{,}8} \approx 0{,}55556$$

$$x_9 = 1{,}9 \qquad y_9 = \frac{1}{x_9} = \frac{1}{1{,}9} \approx 0{,}52632$$

Сумма = 7,18773.

По формуле (3.1) получаем:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}1 \cdot 7{,}18773 = 0{,}718773.$$

Полученное значение больше истинного, так как кривая $y = \frac{1}{x}$ обращена к оси x своей выпуклостью.

Вычислим остаточный член по формуле (3.2). Для этого предварительно определяем первую производную подынтегральной функции:

$$|f'(x)| = \frac{1}{x^2}.$$

Она представляет собой убывающую функцию и, следовательно, принимает максимальное значение при меньшем x из заданного интервала 1 J x J 2, т.е. при $x = 1$:

$$|f'_{\max}(x)| = |f'(1)| = \frac{1}{1^2} = 1.$$

Подставляя в формулу (3.2), окончательно получаем:

$$R \le \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}05.$$

Ошибка округления существенно меньше полученного R и, следовательно, ее можно не учитывать.

Окончательно получаем:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}72 \pm 0{,}05.$$

Вычисленное по методу прямоугольников значение определенного интеграла оказалось достаточно грубым. Для получения более точного результата следует уменьшить шаг разбиения. Расчеты, выполненные методом прямоугольников при $\frac{h}{2}$, рассмотрены в примере 3.2.

◆ Пример 3.2

Вычислить по формуле прямоугольников определенный интеграл (пример 3.1) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, уменьшив шаг разбиения в 2 раза. Оценить погрешность вычислений.

Решение:

Согласно условию шаг разбиения $h = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05$ (см. пример 3.1). Вычислим значение функции в точках разбиения:

$x_0 = 1$ $\qquad y_0 = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{1} = 1$

$x_1 = 1{,}05$ $\qquad y_1 = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{1{,}05} \approx 0{,}95238$

$x_2 = 1{,}1$ $\qquad y_2 = \frac{1}{x_2} = \frac{1}{1{,}1} \approx 0{,}90909$

$x_3 = 1{,}15$ $\qquad y_3 = \frac{1}{x_3} = \frac{1}{1{,}15} \approx 0{,}86957$

$x_4 = 1{,}2$ $\qquad y_4 = \frac{1}{x_4} = \frac{1}{1{,}2} \approx 0{,}83333$

$x_5 = 1{,}25$ $\qquad y_5 = \frac{1}{x_5} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8$

$x_6 = 1{,}3 \qquad y_6 = \frac{1}{x_6} = \frac{1}{1{,}3} \approx 0{,}76923$

$x_7 = 1{,}35 \qquad y_7 = \frac{1}{x_7} = \frac{1}{1{,}35} \approx 0{,}74074$

$x_8 = 1{,}4 \qquad y_8 = \frac{1}{x_8} = \frac{1}{1{,}4} \approx 0{,}71429$

$x_9 = 1{,}45 \qquad y_9 = \frac{1}{x_9} = \frac{1}{1{,}45} \approx 0{,}68966$

$x_{10} = 1{,}5 \qquad y_{10} = \frac{1}{x_{10}} = \frac{1}{1{,}5} \approx 0{,}66667$

$x_{11} = 1{,}55 \qquad y_{11} = \frac{1}{x_{11}} = \frac{1}{1{,}55} \approx 0{,}64516$

$x_{12} = 1{,}6 \qquad y_{12} = \frac{1}{x_{12}} = \frac{1}{1{,}6} = 0{,}625$

$x_{13} = 1{,}65 \qquad y_{13} = \frac{1}{x_{13}} = \frac{1}{1{,}65} \approx 0{,}60606$

$x_{14} = 1{,}7 \qquad y_{14} = \frac{1}{x_{14}} = \frac{1}{1{,}7} \approx 0{,}58824$

$x_{15} = 1{,}75 \qquad y_{15} = \frac{1}{x_{15}} = \frac{1}{1{,}75} \approx 0{,}57143$

$x_{16} = 1{,}8 \qquad y_{16} = \frac{1}{x_{16}} = \frac{1}{1{,}8} \approx 0{,}55556$

$x_{17} = 1{,}85 \qquad y_{17} = \frac{1}{x_{17}} = \frac{1}{1{,}85} \approx 0{,}54054$

$x_{18} = 1{,}9 \qquad y_{18} = \frac{1}{x_{18}} = \frac{1}{1{,}9} \approx 0{,}52632$

$x_{19} = 1{,}95 \qquad y_{19} = \frac{1}{x_{19}} = \frac{1}{1{,}95} \approx 0{,}51282$

Сумма = 14,11609.

По формуле прямоугольников (3.1) получаем:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}05 \cdot 14{,}11609 \approx 0{,}70580.$$

Для оценки погрешности вычислений используем расчеты, выполненные в примере 3.1. Учитывая, что $h = 0{,}05$ и

$$R \le \frac{1}{2}\left|f'_{\max}(x)\right| \cdot (b-a) \cdot h,$$

получаем

$$R \le \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0{,}05 = 0{,}025\,.$$

Значение абсолютной погрешности уменьшилось в 2 раза.

Решение определенного интеграла $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ можно получить аналитически:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0{,}69315.$$

Сравнение аналитического решения с численным позволяет сделать вывод, что численное решение интеграла, выполненное в примере 3.2, где число разбиений увеличено вдвое, является более точным.

Дальнейшее увеличение числа разбиений (уменьшение h), очевидно, повысит точность численного решения определенного интеграла.

◆ Пример 3.3

По формуле прямоугольников вычислить $\int_1^2 \sqrt{x}\,dx$, разбив интервал интегрирования на десять равных частей. Оценить погрешность вычислений.

Решение:

Здесь $n = 10$, $h = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$.

$x_0 = 1 \qquad y_0 = \sqrt{x_0} = \sqrt{1} = 1;$

$x_1 = 1{,}1 \qquad y_1 = \sqrt{x_1} = \sqrt{1{,}1} = 1{,}0488;$

$x_2 = 1{,}2 \qquad y_2 = \sqrt{x_2} = \sqrt{1{,}2} = 1{,}0954;$

$x_3 = 1{,}3 \qquad y_3 = \sqrt{x_3} = \sqrt{1{,}3} = 1{,}1402;$

$x_4 = 1{,}4 \qquad y_4 = \sqrt{x_4} = \sqrt{1{,}4} = 1{,}1832;$

$x_5 = 1{,}5 \qquad y_5 = \sqrt{x_5} = \sqrt{1{,}5} = 1{,}2247;$

$x_6 = 1{,}6 \qquad y_6 = \sqrt{x_6} = \sqrt{1{,}6} = 1{,}2649;$

$x_7 = 1{,}7 \qquad y_7 = \sqrt{x_7} = \sqrt{1{,}7} = 1{,}3038;$

$x_8 = 1{,}8 \qquad y_8 = \sqrt{x_8} = \sqrt{1{,}8} = 1{,}3416;$

$x_9 = 1{,}9 \qquad y_9 = \sqrt{x_9} = \sqrt{1{,}9} = 1{,}3784.$

Согласно (3.1):

$$\int_1^2 \sqrt{x}dx \approx 0{,}1(1 + 1{,}0488 + 1{,}0954 + 1{,}1402 + 1{,}1832 + 1{,}2247 + 1{,}2649 +$$

$$+ 1{,}3038 + 1{,}3416 + 1{,}3784) = 0{,}1 \cdot 11{,}981 \approx 1{,}198.$$

Оценим погрешность вычислений. Определим, предварительно, модуль наибольшего значения первой производной функции на интервале интегрирования [1, 2]:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Наибольшее значение $f'(x)$ принимает в точке $x = 1$.

$$f'(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \left|f'_{\max}(x)\right| = \frac{1}{2}.$$

По формуле (3.2) имеем:

$$R \le \frac{1}{2}\left|f'_{\max}(x)\right| \cdot (b - a) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}025.$$

Окончательно получаем:

$$\int_1^2 \sqrt{x}dx = 1{,}198 \pm 0{,}025.$$

Вычислим для сравнения заданный интеграл по формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int_1^2 \sqrt{x}dx = \int_1^2 x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) \approx 1{,}219.$$

Таким образом, значение определенного интеграла, вычисленное по формуле Ньютона–Лейбница, попадает в указанный интервал:

$$\int_1^2 \sqrt{x}dx = 1{,}198 \pm 0{,}025.$$

3.1.2. Формула трапеций

В данном методе приближенного вычисления определенного интеграла площадь криволинейной трапеции заменяется площадью прямолинейной трапеции (рис. 3.3). Очевидно, что при той же затрате труда на вычисления получим более точный результат, чем при замене площади криволинейной трапеции площадью прямоугольника.

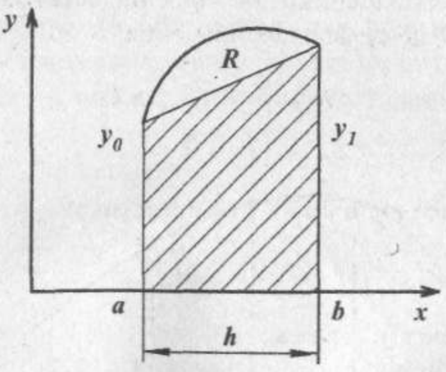


Рис. 3.3

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) \qquad (3.3)$$

Остаточный член (ошибка) формулы (3.3) не превышает значения:

$$|R| \le \frac{h^3}{12}\left|f''_{\max}(x)\right|, \qquad (3.4)$$

где $\left|f''_{\max}(x)\right|$ — максимальное значение абсолютной величины производной второго порядка во всем интервале интегрирования.

В общем случае, если интервал интегрирования не мал, его делят на n равных частей $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ и к каждому из них применяют формулу трапеций (рис. 3.4):

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \ldots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = h \cdot \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right). \qquad (3.5)$$

Ошибка формулы трапеций для каждого малого интервала определяется формулой (3.4). Суммируя все эти ошибки, получим, что абсолютное значение остаточного члена формулы (3.5) не превышает значения:

$$R \le \frac{nh^3}{12} \cdot \left|f''_{\max}(x)\right|. \qquad (3.6)$$

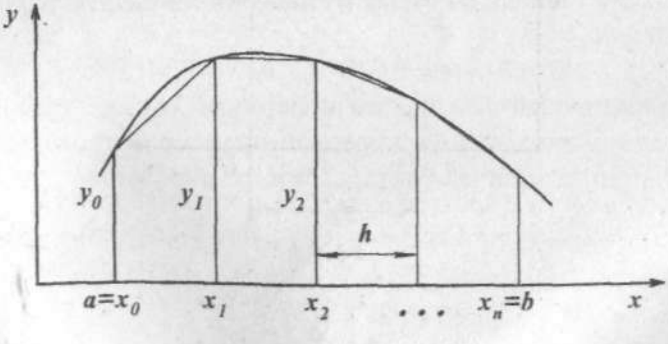


Рис. 3.4

◆ Пример 3.4

Вычислить по формуле трапеций определенный интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$. Оценить погрешность вычислений.

Решение:

Так же, как в примере 3.1, положим $n = 10$. Воспользуемся вычисленными в примере 3.1 значениями функции в точках разбиения. По формуле (3.5) найдем значение определенного интеграла:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = 0{,}1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + 0{,}90909 + 0{,}83333 + 0{,}76923 + 0{,}71429 + \right.$$

$$\left. + 0{,}66667 + 0{,}625 + 0{,}55556 + 0{,}58824 + 0{,}52632 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 0{,}69377.$$

Оценим погрешность вычислений. Полная погрешность R_0 складывается из погрешности арифметических действий R' и остаточного члена R.

$$R' = \sum_{i=0}^{n} A_i \varepsilon,$$

где A_i — коэффициенты формулы трапеций; ε — максимальная ошибка округления значений подынтегральной функции.

$$R' = h \cdot n \cdot \varepsilon = 0{,}1 \cdot 10 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-5} = 0{,}5 \cdot 10^{-5}.$$

Остаточный член оценим по формуле (3.6), предварительно определив максимальное значение второй производной функции на заданном интервале интегрирования.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2};$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}.$$

$|f''(x)| = \dfrac{2}{x^3}$ — убывающая функция, на интервале $1 \le x \le 2$ наибольшее значение имеет в точке $x = 1$.

$$|f''(x)| = f''(1) = 2.$$

По формуле (3.6) получаем:

$$R \le \frac{10 \cdot 0{,}1^3}{12} \cdot 2 \approx 0{,}0017.$$

R' существенно меньше R, поэтому можно считать $R_0 \approx R$.

С учетом точного решения заданного определенного интеграла (см. пример 3.2), абсолютная погрешность численного интегрирования методом трапеций:

$$0{,}69377 - 0{,}69315 = 0{,}00062 < R.$$

◆ Пример 3.5

Вычислить интеграл $\int_1^2 \sqrt{x}\,dx$ по формуле трапеций, приняв шаг разбиения равным $h = 0{,}1$. Оценить погрешность.

Решение:

Воспользуемся вычисленными в примере 3.3 значениями функции в точках разбиения. Дополнительно определим $y_{10} = \sqrt{2} \approx 1{,}4142$. По формуле трапеций (3.5) получаем:

$$\int_a^b f(x)dx = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_9 \right);$$

$$\int_1^2 \sqrt{x}dx = 0{,}1 \cdot \left(\frac{1 + 1{,}4142}{2} + 1{,}0488 + 1{,}0954 + 1{,}1402 + 1{,}1832 + \right.$$

$$\left. + 1{,}2247 + 1{,}2649 + 1{,}3038 + 1{,}3416 + 1{,}3784 \right) = 1{,}2188.$$

Определим модуль наибольшего значения второй производной функции $f(x) = \sqrt{x}$ на интервале интегрирования [1, 2].

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'=\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}.$$

$|f''(x)|=\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$ — функция убывающая, следовательно, на интервале [1, 2] максимальное значение имеет в точке $x=1$:

$$|f''_{\max}(x)|=\frac{1}{4\sqrt{1^3}}=\frac{1}{4}.$$

По формуле (3,6) имеем:

$$R\le\frac{10\cdot(0{,}1)^3}{12}\cdot\frac{1}{4}\approx 0{,}0002.$$

Итак, $\int\limits_1^2\sqrt{x}dx=1{,}2188\pm 0{,}0002$.

3.1.3. Формула Симпсона и ее остаточный член

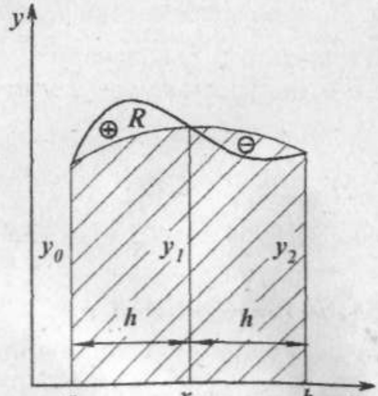


Рис. 3.5

Значительно более точные результаты получаются, если площадь криволинейной трапеции заменяют площадью полосы, ограниченной сверху не прямой линией, а дугой параболы, проходящей через три точки кривой с абсциссами a, $x_1=a+h$ и $b=a+2h$ (рис. 3.5).

Значение определенного интеграла вычисляется по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \tag{3.7}$$

Формула (3.7) носит название *формулы Симпсона.*

Абсолютное значение остаточного члена формулы Симпсона не превышает значения:

$$R \le \frac{h^5}{90} \cdot \left| f_{\max}^{(IV)} \right|. \tag{3.8}$$

$\left| f_{\max}^{(IV)} \right|$ — модуль максимального значения четвертой производной от функции $f(x)$ на интервале интегрирования $[a, b]$.

Формула Симпсона является более точной по сравнению с формулой прямоугольников и формулой трапеций.

В общем случае, интервал интегрирования разбивается на $n = 2m$ четное число равных частей и к каждому удвоенному промежутку $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$,…, $[x_{2m-2}, x_{2m}]$ длины $2h$ (рис. 3.6) применяют формулу Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}).$$

Приводя подобные слагаемые, получаем *общую формулу Симпсона*:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}) + \\ + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2})]. \tag{3.9}$$

Сумму нечетных значений функции обозначим σ_1:

$$\sigma_1 = y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1},$$

а значений функции с четными индексами — σ_2:

$$\sigma_2 = y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}.$$

Тогда формула (3.9) примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_n) + 4\sigma_1 + 2\sigma_2] \qquad (3.10)$$

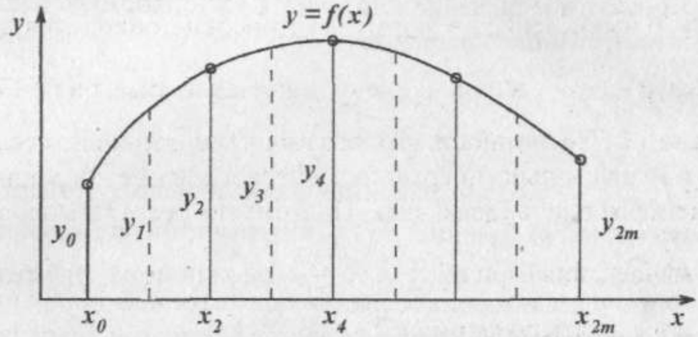


Рис. 3.6

Ошибка формулы Симпсона (3.10) на каждом удвоенном промежутке $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, где $k = 1, 2, \ldots, m$, определяется формулой (3.8). Суммируя все эти ошибки, получим абсолютное значение остаточного члена общей формулы Симпсона в виде:

$$R \le \frac{mh^5}{90} \cdot \left| f_{\max}^{(IV)} \right| = \frac{h^4}{180} \cdot \left| f_{\max}^{(IV)} \right| \cdot (b - a). \qquad (3.11)$$

Отметим, что выражение погрешности в виде определенной формулы имеет скорее теоретическое, чем практическое значение, так как обыкновенно дает слишком грубый предел.

В ряде случаев отыскание четвертой производной подынтегральной функции оказывается затруднительным. В таких случаях для оценки погрешности вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ по формуле Симпсона при выбранном шаге разбиения $h = \frac{b-a}{n}$, если $n = 4k$, применяют специальный прием, называемый методом удвоения шага вычислений.

Вычисляется приближенное значение данного интеграла по формуле Симпсона, в которой принять $h=\frac{b-a}{4k}$. Назовем найденное значение интеграла J_1. Далее шаг h удваивается, и вычисление по формуле Симпсона проводится для шага $h=\frac{b-a}{2k}$; вновь найденное значение интеграла обозначим J_2. Погрешность второго вычисления приблизительно в 16 раз больше погрешности первого, и обе погрешности имеют одинаковый знак. Поэтому погрешность первого вычисления (при шаге $h=\frac{b-a}{4k}$) можно приблизительно определять по формуле:

$$\delta J_1=\frac{J_1-J_2}{15}.$$

Такой способ называют *оценкой погрешности формулы Симпсона по методу удвоения шага вычислений.*

Применение вышеописанного метода проиллюстрировано в примере 3.8.

◆ Пример 3.6

Вычислить по формуле Симпсона определенный интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$. Оценить погрешность вычислений.

Решение:

Вычисление значений функции $y=\frac{1}{x}$ в точках разбиения подробно рассмотрено в примере 3.1. Определим сумму нечетных значений функции σ_1:

$x_1=1{,}1 \qquad y_1=\frac{1}{x_1}=\frac{1}{1{,}1}\approx 0{,}90909$

$$x_3 = 1{,}3 \qquad y_3 = \frac{1}{x_3} = \frac{1}{1{,}3} \approx 0{,}76923$$

$$x_5 = 1{,}5 \qquad y_5 = \frac{1}{x_5} = \frac{1}{1{,}5} \approx 0{,}66667$$

$$x_7 = 1{,}7 \qquad y_7 = \frac{1}{x_7} = \frac{1}{1{,}7} \approx 0{,}58824$$

$$x_9 = 1{,}9 \qquad y_9 = \frac{1}{x_9} = \frac{1}{1{,}9} \approx 0{,}52632$$

Сумма $\sigma_1 = 3{,}45955.$

Сумма значений функции с четными индексами:

$$x_2 = 1{,}2 \qquad y_2 = \frac{1}{x_2} = \frac{1}{1{,}2} \approx 0{,}83333$$

$$x_4 = 1{,}4 \qquad y_4 = \frac{1}{x_4} = \frac{1}{1{,}4} \approx 0{,}71429$$

$$x_6 = 1{,}6 \qquad y_6 = \frac{1}{x_6} = \frac{1}{1{,}6} = 0{,}625$$

$$x_8 = 1{,}8 \qquad y_8 = \frac{1}{x_8} = \frac{1}{1{,}8} \approx 0{,}55556$$

Сумма $\sigma_2 = 2{,}72818.$

$y_0 = 1,\ y_{10} = 0{,}5.$

По формуле Симпсона (3.10) получаем:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{10}) + 4\sigma_1 + 2\sigma_2] =$$

$$= \frac{0{,}1}{3}(1 + 0{,}5 + 4 \cdot 3{,}45955 + 2 \cdot 2{,}72818) = 0{,}69315.$$

Оценим погрешность вычислений. Остаточный член, согласно (3.11), равен:

$$R \le \frac{mh^5}{90} \cdot \left| f_{\max}^{(IV)} \right|.$$

В данном примере $m = 5, h = 0{,}1$. Определим модуль максимального значения четвертой производной:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2},$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3},$$

$$f'''(x) = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = -\frac{6}{x^4},$$

$$f^{(IV)}(x) = \left(-\frac{6}{x^4}\right)' = \frac{24}{x^5},$$

$$\left|f_{\max}^{(IV)}\right| = \left|f^{(IV)}(1)\right| = 24,$$

$$R \le \frac{5 \cdot 0{,}1^5}{90} \cdot 24 = 0{,}00001.$$

Погрешность арифметических действий (см. пример 3.4) не превышает

$$R' = \frac{0{,}1}{3}(2 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4) \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-5} = 0{,}5 \cdot 10^{-5},$$

$$R_0 = R + R' = 10^{-5} + 0{,}5 \cdot 10^{-5} = 1{,}5 \cdot 10^{-5}.$$

Аналитическое решение заданного интеграла (см. пример 3.2):

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = 0{,}69315.$$

Таким образом, вычисленное по формуле Симпсона значение определенного интеграла совпадает с его аналитическим решением вплоть до пятого десятичного знака.

◆ Пример 3.7

Вычислить интеграл $\int_1^2 \sqrt{x}dx$ по формуле Симпсона с точностью до $0{,}001$.

Решение:

Определим, прежде всего, шаг разбиения, необходимый для достижения заданной точности. По формуле (3.11) имеем:

$$R \le \frac{h^4}{180} \cdot \left| f_{\max}^{(IV)} \right| \cdot (b-a).$$

Определим максимальное значение модуля четвертой производной:

$$f(x) = \sqrt{x}\,; \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,; \qquad f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\,;$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}\,; \qquad f^{(IV)}(x) = -\frac{15}{16\sqrt{x^7}}.$$

На отрезке [1, 2] максимальное значение $\left| f_{\max}^{(IV)}(x) \right|$ имеет в точке $x = 1$:

$$\left| f_{\max}^{(IV)}(x) \right| = \frac{15}{16}.$$

Поэтому $R \le \frac{h^4}{180} \cdot 1 \cdot \frac{15}{16}$.

Потребуем, чтобы эта погрешность была меньше 0,001:

$$\frac{h^4}{192} \le 0{,}001\,; \qquad h^4 \le 0{,}192\,; \qquad h \le 0{,}66.$$

Примем $h = 0{,}5$, т.е. интервал интегрирования разобьем на две части. Вычисления произведем с одним запасным знаком.

$x_0 = 1$ $\qquad y_0 = \sqrt{1} = 1;$
$x_2 = 1{,}5$ $\qquad y_2 = 1{,}2247;$
$x_3 = 2$ $\qquad y_3 = 1{,}4142.$

По формуле Симпсона (3.7) имеем:

$$\int_1^2 \sqrt{x}\,dx \approx \frac{0{,}5}{3}(1 + 4 \cdot 1{,}2247 + 1{,}4142) \approx 1{,}2188.$$

Округляя последний знак, получаем значение интеграла по формуле Симпсона:

$$\int_1^2 \sqrt{x}dx \approx 1{,}219.$$

Сравнивая со значением интеграла, вычисленным по формуле Ньютона–Лейбница (см. пример 3.3), видим, что эти значения совпадают с точностью до третьего знака после запятой.

◆ Пример 3.8

Вычислить по формуле Симпсона $\int_1^2 \frac{dx}{2+x}$, приняв $n = 8$. Вычисление вести с шестью знаками после запятой. Оценить погрешность полученного результата, пользуясь способом удвоения шага вычислений. Сравнить результат с истинным значением интеграла, взяв последнее с одним запасным (седьмым) знаком.

Решение:

Определим шаг разбиения:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{8} = 0{,}125.$$

Вычислим значения функции в точках разбиения:

$x_0 = 1$ $\qquad y_0 = \frac{1}{2+1} \approx 0{,}333333;$

$x_1 = 1{,}125$ $\qquad y_1 = \frac{1}{2+1{,}125} \approx 0{,}320000;$

$x_2 = 1{,}25$ $\qquad y_2 = \frac{1}{2+1{,}25} \approx 0{,}307692;$

$x_3 = 1{,}375$ $\qquad y_3 = \frac{1}{2+1{,}375} \approx 0{,}296296;$

$x_4 = 1{,}5$ $\qquad y_4 = \frac{1}{2+1{,}5} \approx 0{,}285714;$

$$x_5 = 1{,}625 \qquad y_5 = \frac{1}{2+1{,}625} \approx 0{,}275862;$$

$$x_6 = 1{,}75 \qquad y_6 = \frac{1}{2+1{,}75} \approx 0{,}266667;$$

$$x_7 = 1{,}875 \qquad y_7 = \frac{1}{2+1{,}875} \approx 0{,}258065;$$

$$x_8 = 2 \qquad y_8 = \frac{1}{2+2} \approx 0{,}25.$$

Подставляем эти данные в формулу Симпсона (3.10):

$$J_1 = \frac{h}{3}[y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)],$$

$$J_1 = \frac{0{,}125}{3}[0{,}333333 + 0{,}25 + 4(0{,}32 + 0{,}296296 + 0{,}275862 +$$

$$+ 0{,}258065 + 2(0{,}307692 + 0{,}285714 + 0{,}266667]) \approx 0{,}287682.$$

Вычислим интеграл по формуле Симпсона, удвоив шаг разбиения, т.е. при $h_2 = 0{,}25$.

$$J_2 = \frac{h_2}{3}[y_0 + y_8 + 4(y_2 + y_6) + 2y_4];$$

$$J_2 = \frac{0{,}25}{3}[0{,}333333 + 0{,}25 + 4(0{,}307692 + 0{,}266667) +$$

$$+ 2 \cdot 0{,}285714] \approx 0{,}287683.$$

Отсюда

$$\delta J_1 \approx \frac{J_1 - J_2}{15} \approx -0{,}000000066.$$

Таким образом, все шесть знаков интеграла J_1 должны быть точными. Истинное значение интеграла вычислим по формуле Ньютона–Лейбница, сохраняя семь знаков после запятой:

$$J = \int_1^2 \frac{dx}{2+x} = \ln|2+x|\Big|_1^2 = \ln 4 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3} \approx 0{,}2876821.$$

Сравнение значений J_1 с J подтверждает найденный результат.

3.2. Численное дифференцирование

В ряде случаев возникает необходимость найти производные от функции $y=f(x)$, заданной таблично. Возможно также, что непосредственное дифференцирование функции оказывается слишком сложным в силу особенностей аналитического задания функции. В этих случаях прибегают к *приближенному дифференцированию.*

Для вывода формулы приближенного дифференцирования данную функцию $f(x)$ заменяют интерполяционным полиномом $P(x)$ и полагают:

$$f'(x)=P'(x) \text{ на отрезке } [a, b].$$

Погрешность интерполирующей функции $P(x)$ определяют разностью: $R(x)=f(x)-P(x)$, тогда погрешность производной $P'(x)$ выражается формулой:

$$r(x)=f'(x)-P'(x)=R'(x).$$

Получим формулы приближенного дифференцирования, основанные на первой интерполяционной формуле Ньютона.

Пусть функция $y=f(x)$ задана в равноотстоящих точках x_i $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ отрезка $[a, b]$. Функцию y приближенно заменим интерполяционным полиномом Ньютона:

$$y=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0+ \\ +\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0+\ldots \qquad (3.12)$$

Здесь $q=\dfrac{x-x_0}{h}$, $h=x_{i+1}-x_i$ — шаг интерполяции.

Δy_0 — первая конечная разность:

$\Delta y_0=\Delta f(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0)$.

$\Delta^2 y_0$ — вторая конечная разность: $\Delta^2 y_0=\Delta(\Delta y_0)$.

$\Delta^n y_0$ — конечные разности высших порядков:

$\Delta^n y_0=\Delta(\Delta^{n-1} y_0)$.

Производя перемножение в формуле (3.12) и раскрывая факториал, получаем:

$$y = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_0 + \\ + \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^4 y_0 + \ldots \qquad (3.13)$$

Учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq}\cdot\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}\cdot\frac{dy}{dq}$, получаем формулу приближенного дифференцирования:

$$y' = \frac{1}{h}[\Delta y_0 + \frac{2q - 1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \\ + \frac{2q^3 - 9q^2 + 11q - 3}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots]. \qquad (3.14)$$

Аналогично для второй производной:

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dq}\cdot\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}\cdot\frac{d(y')}{dq}$$

$$y'' = \frac{1}{h^2}[\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2 - 18q + 11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots]. \qquad (3.15)$$

Таким же способом можно вычислить производную любого порядка.

Если функция задана таблично и значение производной нужно вычислить в узловых точках x_i, то каждое табличное значение принимают за начальное $x = x_0$ и тогда $q = 0$. Формулы численного дифференцирования существенно упрощаются. Полагая в формуле (3.14) $q = 0$, получаем:

$$y' = \frac{1}{h}(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \ldots). \qquad (3.16)$$

Для второй производной:

$$y'' = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \ldots). \qquad (3.17)$$

Опустим теоретический вывод и приведем конечную формулу для вычисления погрешности производной:

$$R'(x_0) \approx \frac{(-1)^k \Delta^{k+1} y_0}{h \cdot (k+1)},$$

где k — это максимальный порядок конечной разности, входящей в интерполяционный полином Ньютона $P(x)$.

В формулы численного дифференцирования входят конечные разности разных порядков функции $y = f(x)$. Рассмотрим подробно на примере вычисление конечных разностей некоторой функции.

◆ Пример 3.9

Построить конечные разности для функции $P(x) = x^3$, полагая шаг равным единице: $h = 1$.

Решение:

Первая конечная разность функции $P(x)$:

$\Delta P(x) = P(x + h) - P(x);$

$\Delta P(x) = (x + 1)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1.$

Вторая конечная разность функции $P(x)$:

$\Delta^2 P(x) = \Delta[\Delta P(x)];$

$\Delta^2 P(x) = [3(x + 1)^2 + 3(x + 1) + 1] - (3x^2 + 3x + 1) = 6x + 6.$

Конечная разность третьего порядка:

$\Delta^3 P(x) = \Delta[\Delta^2 P(x)];$

$\Delta^3 P(x) = [6(x + 1) + 6] - (6x + 6) = 6.$

Конечная разность четвертого порядка:

$\Delta^4 P(x) = \Delta[\Delta^3 P(x)];$

$\Delta^4 P(x) = 6 - 6 = 0.$

Все конечные разности порядка выше четвертого также равны нулю: $\Delta^n P(x) = 0$.

Справедливо общее утверждение: если полином

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

является полиномом n-й степени, то конечная разность n-го порядка — постоянная величина:

$$\Delta^n P(x) = const = n! a_0 h^n. \qquad (3.18)$$

Конечные разности порядка выше, чем *n*, равны нулю.

В случае табличного задания функции $y = f(x)$ для системы равноотстоящих точек x_i $(i = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = const$, конечные разности определяются по формулам:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i. \qquad (3.19)$$

Вычисленные конечные разности различных порядков располагают в форме таблицы 3.1, которую называют горизонтальной таблицей разностей или просто таблицей конечных разностей.

Таблица 3.1

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	…
0	x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	…
1	x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	…
2	x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	…
…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…

◆ Пример 3.10

Составить горизонтальную таблицу разностей функции

$$y = x^3 - x^2 + 6x - 4.$$

Начальное значение принять равным нулю: $x_0 = 0$, шаг равным единице: $h = 1$.

Решение:

Вычислим значения функции в некоторых узловых точках.

$$
\begin{array}{lll}
\text{При} & x_0 = 0 & y_0 = 0^3 - 0^2 + 6 \cdot 0 - 4 = -4, \\
& x_1 = 1 & y_1 = 1^3 - 1^2 + 6 \cdot 1 - 4 = 2, \\
& x_2 = 2 & y_2 = 2^3 - 2^2 + 6 \cdot 2 - 4 = 12, \\
& x_3 = 3 & y_3 = 3^3 - 3^2 + 6 \cdot 3 - 4 = 32, \\
& x_4 = 4 & y_4 = 4^3 - 4^2 + 6 \cdot 4 - 4 = 68, \\
& x_5 = 5 & y_5 = 5^3 - 5^2 + 6 \cdot 5 - 4 = 126, \\
& \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array} \qquad (3.20)
$$

По формулам (3.19) вычислим конечные разности различных порядков и занесем их в таблицу 3.2.

$$
\begin{aligned}
&\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 2 - (-4) = 6, \\
&\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 12 - 2 = 10, \\
&\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 10 - 6 = 4.
\end{aligned} \qquad (3.21)
$$

Данная функция $y=f(x)$ является полиномом третьей степени, поэтому третья разность ее постоянна и вычисляется по формуле (3.18):

$$\Delta^3 y_i = 3! \cdot 1 \cdot 1^3 = 6.$$

Дальнейшее заполнение таблицы удобно производить при помощи суммирования уже вычисленных значений величин.

Согласно формулам (3.19):

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i .$$

Отсюда:

$$
\begin{aligned}
&\Delta^2 y_{i+1} = \Delta^2 y_i + \Delta^3 y_i, \\
&\Delta^2 y_{i+1} = \Delta^2 y_i + 6 \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).
\end{aligned}
$$

Таким образом, столбец $\Delta^2 y$ получается добавлением значения третьей разности (числа 6) к каждому вышестоящему элементу.

Для формирования столбца Δy из (3.19) получаем формулу:

$$\Delta y_{i+1} = \Delta y_i + \Delta^2 y_i \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Каждый элемент столбца Δy представляет собой сумму вышестоящего числа в этом столбце и соседнего с ним в столбце $\Delta^2 y$. (См. стрелку в таблице.)

Используя формулы (3.19), для элементов столбца y получаем выражение, существенно облегчающее вычисление значений функции в узловых точках:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Правило заполнения столбца y такое же, как столбца Δy. (См. стрелку в таблице.)

Ступенчатой ломаной отмечены исходные данные, необходимые для заполнения таблицы по указанным правилам. Подробные вычисления представлены в (3.20) и (3.21).

Таблица 3.2

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	– 4	6	4	6
1	2	10	10	+ 6
2	12	20	+ 16	6
3	32	+ 36	22	6
4	68	58	28	6
5	126	86	34	6
6	212	120	40	6
....	....	....	....	....

◆ **Пример 3.11**

Построить таблицу разностей функции $y = f(x)$, заданной таблично:

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	1	5	15	35	70	140

Решение:

Вычислим конечные разности первого порядка:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 5 - 1 = 4,$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 15 - 5 = 10,$$

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = 35 - 15 = 20,$$

$$\Delta y_3 = y_4 - y_3 = 70 - 35 = 35,$$

$$\Delta y_4 = y_5 - y_4 = 140 - 70 = 70.$$

Полученные значения разностей первого порядка занесем в столбец Δy таблицы разностей.

Определим конечные разности второго порядка:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 10 - 4 = 6,$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 20 - 10 = 10,$$

$$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = 35 - 20 = 15,$$

$$\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3 = 70 - 35 = 35.$$

Результаты заносим в столбец $\Delta^2 y$.

Конечные разности третьего порядка:

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = 10 - 6 = 4,$$

$$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = 15 - 10 = 5,$$

$$\Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 = 35 - 15 = 20.$$

Заполним столбец $\Delta^3 y$.

Конечные разности четвертого порядка:

$$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 = 5 - 4 = 1,$$

$$\Delta^4 y_1 = \Delta^3 y_2 - \Delta^3 y_1 = 20 - 5 = 15.$$

Заполним столбец $\Delta^4 y$.

Конечная разность пятого порядка:

$$\Delta^5 y_0 = \Delta^4 y_1 - \Delta^4 y_0 = 15 - 1 = 14.$$

9. Зак. 649

Таким образом, таблица разностей для заданной функции имеет вид:

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	0	1	4	6	4	1	14
1	1	5	10	10	5	15	
2	2	15	20	15	20		
3	3	35	35	35			
4	4	70	70				
5	5	140					

◆ Пример 3.12

Найти производную функции $y = \lg x$, заданной таблично в точке $x = 30$.

Значения функции $y = \lg x$.

x	y
30	1,4771
35	1,5441
40	1,6021
45	1,6532
50	1,6990

Решение:

Здесь шаг $h = 5$. Вычислим конечные разности различных порядков по формулам:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 1{,}5441 - 1{,}4771 = 0{,}067,$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 1{,}6021 - 1{,}5441 = 0{,}058,$$

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = 1{,}6532 - 1{,}6021 = 0{,}0511,$$

$$\Delta y_3 = y_4 - y_3 = 1{,}6990 - 1{,}6532 = 0{,}0458.$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 0{,}058 - 0{,}067 = -0{,}009,$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 0{,}0511 - 0{,}058 = -0{,}0069,$$

$$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = 0{,}0458 - 0{,}0511 = -0{,}0053.$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = -0{,}0069 + 0{,}009 = 0{,}0021,$$

$$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = -0{,}0053 + 0{,}0069 = 0{,}0016.$$

$$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 = 0{,}0016 - 0{,}0021 = -0{,}0005.$$

Заполним таблицу разностей:

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	30	1,4771	0,0670	–0,0090	0,0021	–0,0005
1	35	1,5441	0,0580	–0,0069	0,0016	
2	40	1,6021	0,0511	–0,0053		
3	45	1,6532	0,0458			
4	50	1,6990				

Отметим, что на практике таблицу конечных разностей заполняют сразу по правилам, разобранным в примере 3.10. Вычисление разностей по формулам (3.19) мы привели в качестве проверки.

По формуле (3.16), используя первую строчку таблицы, с точностью до разностей четвертого порядка, получаем:

$$y'(30) = \frac{1}{5}\left(0{,}067 + \frac{0{,}0090}{2} + \frac{0{,}0021}{3} + \frac{0{,}0005}{4}\right),$$

$$y'(30) \approx 0{,}0145.$$

Оценим точность найденного значения. Заданная таблично функция есть $y = \lg x$. Производная этой функции:

$$y' = \frac{1}{x}\lg e \approx \frac{0{,}4343}{x}.$$

При $x = 30$ получим:

$$y'(30) = \frac{0{,}4343}{30} \approx 0{,}0145.$$

Таким образом, результаты совпали с точностью до четвертого десятичного знака.

◆ Пример 3.13

Найти значения первой и второй производных функции Бесселя, заданной таблично, в точке $x = 1$.

x	0,96	0,98	1	1,02	1,04
y	0,782536	0,773933	0,765198	0,756332	0,747339

Решение:

Составим таблицу конечных разностей. Рекомендуем эту таблицу заполнять сразу без предварительных вычислений. В примере приводится подробная запись с целью продемонстрировать последовательность действий при вычислении конечных разностей различного порядка.

Первые конечные разности:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 0{,}773933 - 0{,}782536 = -0{,}008603,$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 0{,}765198 - 0{,}773933 = -0{,}008735,$$
$$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = 0{,}756332 - 0{,}765198 = -0{,}008866,$$
$$\Delta y_3 = y_4 - y_3 = 0{,}747339 - 0{,}756332 = -0{,}008993.$$

Вторые конечные разности:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = -0{,}008735 + 0{,}008603 = -0{,}000132,$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = -0{,}008866 + 0{,}008735 = -0{,}000131,$$
$$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = -0{,}008993 + 0{,}008866 = -0{,}000127.$$

Третьи конечные разности:

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = -0{,}000131 + 0{,}000132 = 0{,}000001,$$
$$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = -0{,}000127 + 0{,}000131 = 0{,}000004.$$

Четвертая конечная разность:

$$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 = 0{,}000004 - 0{,}000001 = 0{,}000003.$$

Таблица конечных разностей:

i	x	y	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,96	0,782536	–0,008603	–0,000132	0,000001	0,000003
1	0,98	0,773933	–0,008735	–0,000131	0,000004	
2	1	0,765198	–0,008866	–0,000127		
3	1,02	0,756332	–0,008993			
4	1,04	0,747339				

Значение первой производной функции в точке $x = 1$ вычисляем по формуле (3.16):

$$y'(x=1) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_2 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_2\right);$$

$$y'(x=1) \approx \frac{1}{0{,}02}\left(-0{,}008866 - \frac{1}{2}\cdot(-0{,}000127)\right) \approx -0{,}440125.$$

Вторая производная функции Бесселя в точке $x = 1$ [см. формулу (3.17)]:

$$y''(x=1) \approx \frac{1}{h^2}\cdot\Delta^2 y_2;$$

$$y''(x=1) \approx \frac{1}{0{,}02^2}\cdot(-0{,}000127) = -0{,}3175.$$

Для сравнения приведем точные значения производных функции Бесселя в точке $x = 1$:

$$y'(x=1) = -0{,}440056 \qquad y''(x=1) = -0{,}325147.$$

◆ Пример 3.14

Найти значения первой и второй производных функции, заданной таблично, в точке $x = 2{,}7$.

x	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6
y	2,857	3,946	4,938	5,801	6,503	7,010	7,288	7,301

Решение:

Составим таблицу конечных разностей заданной функции:

i	x	y	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,8	2,857	1,089	–0,097	–0,032	0
1	1,2	3,946	0,992	–0,129	–0,032	–0,002
2	1,6	4,938	0,863	–0,161	–0,034	0
3	2,0	5,801	0,702	–0,195	–0,034	–0,002
4	<u>2,4</u>	<u>6,503</u>	<u>0,507</u>	<u>–0,229</u>	<u>–0,036</u>	
5	2,8	7,010	0,278	–0,265		
6	3,2	7,288	0,013			
7	3,6	7,301				

В данном примере точка, в которой нужно вычислить производные, не является узловой, т.е. значение функции в этой точке не задано. В таком случае следует воспользоваться формулами (3.14) и (3.15):

$$y' = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right),$$

$$q = \frac{x-x_0}{h}.$$

Ближайшая к $x = 2{,}7$ меньшая точка, в которой известно значение функции $x = 2{,}4$. Поэтому положим $x_0 = 2{,}4$.

Тогда $q = \dfrac{2{,}7-2{,}4}{0{,}4} = 0{,}75$.

Подставляем в формулу первой производной функции:

$$y'(2{,}7) \approx \frac{1}{0{,}4}\left(0{,}507 + \frac{2\cdot 0{,}75-1}{2}\cdot(-0{,}229) + \right.$$

$$\left. + \frac{3\cdot(0{,}75)^2 - 6\cdot 0{,}75 + 2}{6}\cdot(-0{,}036)\right) \approx 1{,}137.$$

Вторая производная функции:

$$y'' = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right).$$

$$y''(2{,}7) = \frac{1}{0{,}4^2}\big(-0{,}229 + (0{,}75-1)\cdot(-0{,}036)\big) \approx -1{,}375.$$

◆ Пример 3.15

В точке $x = 7{,}5$ вычислить производные функции, заданной таблично.

x	7,5	7,52	7,54	7,56	7,58	7,6	7,62	7,64	7,66
y	0,2009	0,2058	0,2107	0,2155	0,2202	0,2249	0,2295	0,2341	0,2385

Решение:

Составим таблицу конечных разностей заданной функции:

i	x	y	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	7,5	0,2009	0,0049	0	–0,0001	0,0001	0
1	7,52	0,2058	0,0049	–0,0001	0	0,0001	–0,0003
2	7,54	0,2107	0,0048	–0,0001	0,0001	–0,0002	0,0004
3	7,56	0,2155	0,0047	0	–0,0001	0,0002	–0,0005
4	7,58	0,2202	0,0047	–0,0001	0,0001	–0,0003	
5	7,6	0,2249	0,0046	0	–0,0002		
6	7,62	0,2295	0,0046	–0,0002			
7	7,64	0,2341	0,0044				
8	7,66	0,2385					

Абсолютная погрешность исходных значений функции $y=f(x)$ не превосходит величины $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-4}$. Абсолютная погрешность разности n-го порядка имеет порядок величины $2^n \cdot \varepsilon$. Из таблицы конечных разностей видно, что разности второго, третьего, четвертого и пятого порядка различаются менее чем на величину погрешности их округления. Поэтому при вычислении производной функции в точке $x = 7,5$ в формуле (3.16) достаточно взять два первых слагаемых

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0\right);$$

$$y'(7,5) \approx \frac{1}{0,02}\left(0,0049 - \frac{1}{2}\cdot 0\right) = 0,245.$$

◆ Пример 3.16

По табличным данным найти аналитическое выражение производной.

x	0	1	2	3	4	5
$y'(x)$	10,4	16	20,8	24,8	28	30,4

Решение:

Составим таблицу конечных разностей, обозначив $u = y'(x)$:

i	x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
0	0	10,4	5,6	–0,8	0
1	1	16	4,8	–0,8	0
2	2	20,8	4	–0,8	0
3	3	24,8	3,2	–0,8	
4	4	28	2,4		
5	5	30,4			

Воспользуемся интерполяционной формулой Ньютона в форме (3.12):

$$u(x) = u_0 + q\Delta u_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 u_0 + \ldots$$

Слагаемое, содержащее третью конечную разность, не записываем, так как $\Delta^3 u = 0$.

Учтем, что $q = \dfrac{x - x_0}{h}$.

По таблице определяем: $x_0 = 0$, $h = 1$.

Следовательно, $q = \dfrac{x-0}{1} = x$.

$$u(x) = 10{,}4 + x \cdot 5{,}6 + \frac{x(x-1)}{2} \cdot (-0{,}8),$$

$$u(x) = y'(x) = 10{,}4 + 5{,}6x - 0{,}4x^2 + 0{,}4x,$$

$$y'(x) = 10{,}4 + 6x - 0{,}4x^2.$$

◆ Пример 3.17

Для функции, заданной таблично, найти аналитическое выражение производной.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	11	40	99	200	355	576	875	1264

Решение:

Определим в точках задания аргумента значения производной функции.

Таблица конечных разностей для заданной функции:

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	1	11	29	30	12	0
1	2	40	59	42	12	0
2	3	99	101	54	12	0
3	4	200	155	66	12	0
4	5	355	221	78	12	
5	6	576	299	90		
6	7	875	389			
7	8	1294				

По формуле (3.16) с $h = 1$:

$$y'(1) = \frac{1}{1}\cdot\left(29 - \frac{30}{2} + \frac{12}{3}\right) = 18,$$

$$y'(2) = \frac{1}{1}\cdot\left(59 - \frac{42}{2} + \frac{12}{3}\right) = 42,$$

$$y'(3) = \frac{1}{1}\cdot\left(101 - \frac{54}{2} + \frac{12}{3}\right) = 78,$$

$$y'(4) = \frac{1}{1}\cdot\left(155 - \frac{66}{2} + \frac{12}{3}\right) = 126,$$

$$y'(5) = \frac{1}{1}\cdot\left(221 - \frac{78}{2} + \frac{12}{3}\right) = 186.$$

Составим таблицу конечных разностей для $y'(x)$:

i	x	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$	$\Delta^3 y'$
0	1	18	24	12	0
1	2	42	36	12	0
2	3	78	48	12	
3	4	126	60		
4	5	186			

Используя данные последней таблицы и интерполяционную формулу Ньютона (3.12) с учетом $q = \dfrac{x-1}{1}$, получаем:

$$y'(x) = 18 + (x-1)\cdot 24 + \frac{(x-1)(x-2)}{2}\cdot 12 = 6(x^2 + x + 1).$$

Задания для самостоятельного решения

- Составить таблицу конечных разностей функций, заданных аналитически, от начального значения x_0 до конечного x_7, приняв шаг, равным h:

1. $y = x^3 - x^2 + 6x - 8$, $x_0 = 0$ $h = 1$;
2. $y = 2x^3 - 8x + 20$, $x_0 = 0{,}5$ $h = 0{,}5$;
3. $y = 0{,}5x^3 + 2x^2 - 3x + 8$, $x_0 = 1$ $h = 1$;
4. $y = 5x^3 - 8x + 4$, $x_0 = 0$ $h = 2$;
5. $y = x^4 - 2x^2 + 1$, $x_0 = 0$ $h = 0{,}5$;
6. $y = x^4 - 2x^2 + 10$, $x_0 = 0$ $h = 0{,}2$;
7. $y = 3(x+1)(x-6)$, $x_0 = 0$ $h = 1$;
8. $y = 5(x-3)(x+2)$, $x_0 = 1$ $h = 1$;
9. $y = x(x-1)(x+2)$, $x_0 = 0$ $h = 1$;
10. $y = (x-3)(x+2)(x+4)$, $x_0 = 0$ $h = 0{,}5$;
11. $y = 8(x-1)(x-2)(x-3)$, $x_0 = 0$ $h = 0{,}5$;
12. $y = 4(x+1)(x+2)(x+3)$, $x_0 = 0$ $h = 1$;
13. $y = 3x^4 - x^2 + 1$, $x_0 = 0$ $h = 0{,}25$;

14. $y = 6x^3 - x^2 + x - 1$, $x_0 = 0$ $h = 0{,}5$;
15. $y = x^3 + x^2 + x + 1$, $x_0 = 0$ $h = 0{,}5$;
16. $y = x^3 - x^2 - x - 10$, $x_0 = 0$ $h = 1$;
17. $y = 0{,}2x^3 - 0{,}1x^2 - 20$, $x_0 = 0$ $h = 2$;
18. $y = 0{,}1x^3 + 0{,}5x^2 + x$, $x_0 = 0$ $h = 1$;
19. $y = 10x^3 + 5x + 10$, $x_0 = 0$ $h = 0{,}2$;
20. $y = x^3 - 3x^2 - x - 8$, $x_0 = 1$ $h = 0{,}5$.

▸ Составить таблицу конечных разностей для функции, заданной таблично:

21.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	7,5	2	–3,5	–6	–2,5	10	34,5

22.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	–3,9	–0,2	6,7	17,4	32,5	52,6	78,3

23.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	–3,9	–5,2	–3,3	2,4	12,5	27,6	48,3

24.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	5,5	18	40,5	76	127,5	198	290,5

25.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	6	16	36	72	130	216	336

26.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	–3	–6	–3	12	45	102	189

27.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	0	8	30	72	140	240	378

28.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	5,2	19,6	44,4	80,8	130	193,2	271,6

29.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	4	22	56	106	172	254	352

30.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	10	27	60	115	198	315

- Найти значения первой и второй производных функции, заданной таблично, в точках $x = a + b \cdot n$:

31. $x = 2{,}4 + 0{,}05n$

x	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4
$y(x)$	3,526	3,782	3,945	4,043	4,104	4,155

а) $n = 1$; б) $n = 3$; в) $n = 5$; г) $n = 7$.

32. $x = 4{,}5 - 0{,}06n$

x	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6
$y(x)$	4,222	4,331	4,507	4,775	5,159	5,683

а) $n = 5$; б) $n = 7$; в) $n = 9$; г) $n = 11$.

33. $x = 1{,}6 + 0{,}08n$

x	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$y(x)$	10,517	10,193	9,807	8,387	8,977	8,637

а) $n = 2$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 8$.

34. $x = 6{,}3 - 0{,}12n$

x	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
$y(x)$	8,442	8,482	8,862	9,701	11,132	13,302

а) $n = 2$; б) $n = 3$; в) $n = 4$; г) $n = 5$.

35. $x = 1{,}2 + 0{,}1n$

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
$y(x)$	1,2661	1,3262	1,3937	1,4693	1,5534	1,6467	1,75

а) $n = 0$; б) $n = 1$; в) $n = 3$; г) $n = 4$.

36. $x = 1{,}5 + 0{,}15n$

x	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3
$y(x)$	1,8640	1,9896	2,1277	2,2796	2,4463	2,6291	2,8296

а) $n = 2$; б) $n = 3$; в) $n = 4$; г) $n = 5$.

- Для функций, заданных таблично, найти аналитическое выражение первой производной:

37.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	8	6	10	26	60	118	206	330	496

38.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	–2	15	58	139	270	463	730	1083	1534

39.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	–1,5	16	70,5	180	362,5	636	1018,5	1528	2182,5

40.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	5,5	18	40,5	76	127,5	198	290,5	408	553,5

41.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	7	24	63	136	255	432	679	1008	1431

42.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	18	78	204	420	750	1218	1848	2664

43.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	8	30	72	140	240	378	560	792

44.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2	26	102	260	530	942	1526	2312	3330

45.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	4	22	56	106	172	254	352	466	596

46.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	8	50	162	380	740	1278	2030	3032	4320

- Вычислить значения первой и второй производных функции в точке x_0 методом численного дифференцирования. Вычисления вести с четырьмя знаками после запятой:

47. $x_0 = 1,5$, функция задана таблично в задаче 37;
48. $x_0 = 2,5$, функция задана таблично в задаче 38;
49. $x_0 = 1,25$, функция задана таблично в задаче 39;
50. $x_0 = 1,75$, функция задана таблично в задаче 40;
51. $x_0 = 2,2$, функция задана таблично в задаче 41;
52. $x_0 = 2,1$, функция задана таблично в задаче 42;
53. $x_0 = 2,25$, функция задана таблично в задаче 43;
54. $x_0 = 2,75$, функция задана таблично в задаче 44;
55. $x_0 = 1,2$, функция задана таблично в задаче 45;
56. $x_0 = 1,6$, функция задана таблично в задаче 46.

3.3. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

В главе 2.2 показано, что обыкновенное дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений. Однако задание начальных условий позволяет получить вполне определенное решение дифференциального уравнения. Нахождение частного решения дифференциального уравнения n-го порядка, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называют *задачей Коши*.

Пусть функция $y = y(x)$ — непрерывная функция одного аргумента, определенная в открытой области $D(x; y)$, т.е. области к которой не причисляют ее границы. Имеет место теорема, которую называют теоремой существования и единственности решения дифференциального уравнения при заданном начальном условии, или *теоремой Коши:*

Если $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области около точки (x_0, y_0), т.е. при $|x - x_0| < a$ и $|y - y_0| < b$, то существует по крайней мере одно решение уравнения

$$y' = f(x, y),$$

принимающее при $x = x_0$ значение y_0, определенное непрерывное в некотором интервале около x_0. Если кроме того $f(x, y)$ имеет в рассматриваемой области ограниченную частную производную $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| < \infty$, то существует единственное решение $y(x)$ обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

3.3.1. Метод Эйлера для решения задачи Коши

Пусть интегральная кривая при начальном условии

$$y(x = x_0) = y_0$$

задана уравнением:

$$y' = f(x, y).$$

Нанесем на плоскость последовательность прямых, параллельных оси ординат: $x = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2$ ... (рис. 3.7).

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — начальная точка интегральной кривой. Из точки M_0 проводим луч с угловым коэффициентом $f(x_0, y_0)$ до пересечения ее с прямой $x = x_1$. Точку пересече-

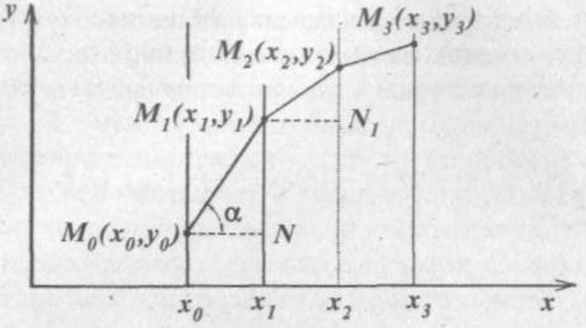


Рис. 3.7

ния назовем $M_1(x_1, y_1)$. Ординату точки M_1 определим из прямоугольного треугольника M_0M_1N:

$$|M_1N| = \operatorname{tg}\alpha \cdot (x_1 - x_0)$$

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0), \text{ так как } \operatorname{tg}\alpha = f(x_0, y_0).$$

Аналогично из точки M_1 проводим луч $M_1 M_2$ с угловым коэффициентом $f(x_1, y_1)$ до пересечения с прямой $x = x_2$. Из прямоугольного треугольника $M_1M_2N_1$ находим:

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1) \cdot (x_2 - x_1).$$

Точно так же строим точки M_2, M_3 и т.д.

Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} &y_1 - y_0 = f(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0), \\ &y_2 - y_1 = f(x_1, y_1) \cdot (x_2 - x_1), \\ &y_3 - y_2 = f(x_2, y_2) \cdot (x_3 - x_2), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &y - y_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1}) \cdot (x - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Если шаг разбиения области непрерывного изменения аргумента сделать постоянным $x_{i+1} - x_i = \Delta x = h$, то формулы (3.22) запишутся так:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

или (3.23)

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot y'(x).$$

Очевидно, что чем меньше шаг разбиения h, тем точнее вычисляются ординаты интегральной кривой.

Абсолютная погрешность вычисления следует из разложения:

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{1} \cdot y'(x) + \frac{h^2}{2} \cdot \left|y''_{max}(x)\right|.$$

$$x_0 \le x \le x_n,$$

$$R \le \frac{h^2}{2} \cdot \left|y''_{max}(x)\right|, \qquad (3.24)$$

Из формулы (3.24) определяют шаг разбиения h, если он не задан в условии задачи.

◆ Пример 3.18

Решить методом Эйлера дифференциальное уравнение $y' = x \cdot y$ при условии $y(0) = 1$, в интервале $0 \le x \le 0{,}6$. Вычисления провести при $h = 0{,}1$.

Решение:

Условия теоремы Коши выполнены:

1) $f(x, y) = x \cdot y$ — непрерывная функция;

2) частная производная $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x < \infty$ в интервале $0 \le x \le 0{,}6$.

Результаты вычислений оформим в виде таблицы. Из начального условия $x_0 = 0$ (второй столбец), $y_0 = 1$ (третий столбец). Функция $f(x_0, y_0) = x_0 \cdot y_0 = 0 \cdot 1 = 0$ (четвертый столбец).

Из формулы (3.23) имеем $\Delta y_0 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0{,}1 \cdot 0 = 0$. Полученное значение записываем в пятый столбец.

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0 = 1,$$
$$f(x_1, y_1) = x_1 \cdot y_1 = 0{,}1 \cdot 1 = 0{,}1,$$
$$\Delta y_1 = h \cdot f(x_1, y_1) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01.$$

Вычисленные значения разносим по соответствующим столбцам.

Аналогично,

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1 + 0{,}01 = 1{,}01,$$
$$f(x_2, y_2) = x_2 \cdot y_2 = 0{,}2 \cdot 1{,}01 = 0{,}202,$$
$$\Delta y_2 = h \cdot f(x_2, y_2) = 0{,}1 \cdot 0{,}202 = 0{,}0202.$$

$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = 1{,}01 + 0{,}0202 = 1{,}0302,$$
$$f(x_3, y_3) = x_3 \cdot y_3 = 0{,}3 \cdot 1{,}0302 = 0{,}309,$$
$$\Delta y_3 = h \cdot f(x_3, y_3) = 0{,}1 \cdot 0{,}3091 = 0{,}0309.$$

$$y_4 = y_3 + \Delta y_3 = 1{,}0302 + 0{,}0309 = 1{,}0611,$$
$$f(x_4, y_4) = x_4 \cdot y_4 = 0{,}4 \cdot 1{,}0611 = 0{,}4244,$$
$$\Delta y_4 = h \cdot f(x_4, y_4) = 0{,}1 \cdot 0{,}4244 = 0{,}0424.$$

$$y_5 = y_4 + \Delta y_4 = 1{,}0611 + 0{,}0424 = 1{,}1035,$$
$$f(x_5, y_5) = x_5 \cdot y_5 = 0{,}5 \cdot 1{,}1035 = 0{,}5518,$$
$$\Delta y_5 = h \cdot f(x_5, y_5) = 0{,}1 \cdot 0{,}5518 = 0{,}0552.$$

$$y_6 = y_5 + \Delta y_5 = 1{,}1035 + 0{,}0552 = 1{,}1587,$$
$$f(x_6, y_6) = x_6 \cdot y_6 = 0{,}6 \cdot 1{,}1587 = 0{,}6952,$$
$$\Delta y_6 = h \cdot f(x_6, y_6) = 0{,}1 \cdot 0{,}6952 = 0{,}0695.$$

Проверим полученные результаты прямым решением заданного уравнения. Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y' = x \cdot y, \qquad \frac{dy}{dx} = x \cdot y.$$

Разделяя переменные, получаем:

$$\frac{dy}{y} = xdx,$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int xdx,$$
$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C,$$

$$y = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}.$$

С учетом начальных условий ($y = 1$ при $x = 0$):

$$1 = C \cdot e^0,$$
$$C = 1.$$

Частное решение: $y = e^{\frac{x^2}{2}}$.

Подставим значения аргумента из заданного интервала в полученное частное решение и результаты расчетов занесем в последний столбец таблицы.

Таблица 3.3

i	x	y	$f(x, y)$	Δy	y точное
0	0	1	0	0	1
1	0,1	1	0,1	0,01	1,0050
2	0,2	1,01	0,202	0,0202	1,0202
3	0,3	1,0302	0,309	0,0309	1,0460
4	0,4	1,0611	0,4244	0,0424	1,0833
5	0,5	1,1035	0,5518	0,0552	1,1331
6	0,6	1,1587	0,6952	0,0695	1,1972

Как видно из таблицы, при $x = 0{,}6$ расхождение вычисленного по методу Эйлера x и точного значения ординаты интегральной кривой $e^{\frac{x^2}{2}}$ имеет наибольшее значение.

Ошибка $R = 1{,}1972 - 1{,}1587 = 0{,}0385$, что составляет приблизительно 3,2% от точного значения.

◆ Пример 3.19

Решить методом Эйлера дифференциальное уравнение $y' = x \cdot y$ при условии $y(x = 0) = 1$, в интервале $0 \le x \le 0{,}6$. Вычисления провести с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 0{,}05$.

Решение:

Выполнение условий теоремы Коши проверено в примере 3.18.

Вычислим в качестве предварительной оценки $y''(x=0)$:

$$y''(x)=(xy)'=y+x\cdot y'=y+x^2y=y(1+x^2)$$

(учли, что $y'=x\cdot y$)

$$y''(x=0)=1\cdot(1+0)=1.$$

Согласно формуле (3.24) абсолютная погрешность:

$$\varepsilon\geq\frac{h^2}{2}y''(x);$$

$$h^2\leq\frac{2\varepsilon}{y''(0)}=\frac{2\cdot0{,}05}{1}=0{,}1;$$

$$h\leq0{,}32.$$

Предварительный расчет можно выполнить, например, при $h=0{,}1$. Воспользуемся результатами расчетов примера 3.18.

$x_0=0$ $\quad y_0=1$ $\quad y''(0)=1\cdot(1+0^2)=1,$

$x_1=0{,}1$ $\quad y_1=1$ $\quad y''(0{,}1)=1\cdot(1+0{,}1^2)=1{,}01,$

$x_2=0{,}2$ $\quad y_2=1{,}01$ $\quad y''(0{,}2)=1{,}01\cdot(1+0{,}2^2)=1{,}0504,$

$x_3=0{,}3$ $\quad y_3=1{,}0302$ $\quad y''(0{,}3)=1{,}0302\cdot(1+0{,}3^2)=1{,}1229,$

$x_4=0{,}4$ $\quad y_4=1{,}0611$ $\quad y''(0{,}4)=1{,}0611\cdot(1+0{,}4^2)=1{,}2309,$

$x_5=0{,}5$ $\quad y_5=1{,}1035$ $\quad y''(0{,}5)=1{,}1035\cdot(1+0{,}5^2)=1{,}3794,$

$x_6=0{,}6$ $\quad y_6=1{,}1587$ $\quad y''(0{,}6)=1{,}1587\cdot(1+0{,}6^2)=1{,}5758.$

Максимальное значение вторая производная имеет в точке $x_6=0{,}6$. Пересчитываем h:

$$h^2\leq\frac{2\varepsilon}{y''(0{,}6)}=\frac{2\cdot0{,}05}{1{,}5758}=0{,}0635;$$

$$h\leq0{,}25.$$

Таким образом, расчет можно проводить при $h=0{,}1$ (см. пример 3.18).

Отметим, что для получения более точных результатов шаг разбиения следует брать с запасом меньше.

◆ Пример 3.20

Решить методом Эйлера дифференциальное уравнение $y' = y - 2x$, где $0 \le x \le 0{,}5$, если при $x_0 = 0$, $y_0 = 3$. Вычисления провести с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 0{,}01$.

Решение:

Проверим выполнение условий теоремы Коши:

1) $f(x, y) = y - 2x$ — непрерывная функция;

2) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 1$ — частная производная по y является ограниченной функцией.

Таким образом, условия теоремы Коши выполнены.

Сделаем предварительную оценку шага разбиения h, вычислив $y''(x_0)$. Согласно формуле (3.24):

$$\frac{h^2}{2}\left|y''(x)\right| \le \varepsilon;$$

$$h^2 \le \frac{2\varepsilon}{\left|y''(x_0)\right|}. \qquad (3.25)$$

Определим модуль значения второй производной функции в точке $x = x_0$:

$$\frac{d}{dx}(y'(x)) = \frac{d}{dx}(y - 2x) = y' - 2.$$

По условию задачи $y' = y - 2x$. Окончательно получаем:

$$y''(x) = y - 2x - 2.$$

Согласно начальным условиям при $x_0 = 0$, $y_0 = 3$

$$y''(x_0) = 3 - 2 \cdot 0 - 2 = 1.$$

Подставим полученное значение в формулу (3.25):

$$h^2 \le \frac{2 \cdot 0{,}01}{1} = 0{,}02;$$

$$h \le \sqrt{0{,}02} \approx 0{,}14.$$

Выберем $h = 0{,}1$ и произведем предварительный расчет. Учтем, что $f(x, y) = y - 2x$.

$x_0 = 0 \quad y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 3 + 0{,}1 \cdot (3 - 0) = 3{,}3,$

$x_1 = 0{,}1 \quad y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 3{,}3 + 0{,}1 \cdot (3{,}3 - 2 \cdot 0{,}1) = 3{,}61,$

$x_2 = 0{,}2 \quad y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 3{,}61 + 0{,}1 \cdot (3{,}61 - 2 \cdot 0{,}2) = 3{,}931,$

$x_3 = 0{,}3 \quad y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 3{,}931 + 0{,}1 \cdot (3{,}931 - 2 \cdot 0{,}3) = 4{,}2641,$

$x_4 = 0{,}4 \quad y_5 = y_4 + h \cdot f(x_4, y_4) = 4{,}2641 + 0{,}1 \cdot (4{,}2641 - 2 \cdot 0{,}4) = 4{,}6105,$

$x_5 = 0{,}5 \quad y_6 = y_5 + h \cdot f(x_5, y_5) = 4{,}6105 + 0{,}1 \cdot (4{,}6105 - 2 \cdot 0{,}5) = 4{,}9716.$

Значения вторых производных в точках разбиения:

$x_0 = 0 \quad y_0 = 3{,}3 \quad y''(x_0) = y_0 - 2x_0 - 2 = 3{,}3 - 2 \cdot 0 - 2 = 1{,}3,$

$x_1 = 0{,}1 \quad y_1 = 3{,}61 \quad y''(x_1) = y_1 - 2x_1 - 2 = 3{,}61 - 2 \cdot 0{,}1 - 2 = 1{,}41,$

$x_2 = 0{,}2 \quad y_2 = 3{,}931 \quad y''(x_2) = y_2 - 2x_2 - 2 = 3{,}931 - 2 \cdot 0{,}2 - 2 = 1{,}531,$

$x_3 = 0{,}3 \quad y_3 = 4{,}2641 \quad y''(x_3) = y_3 - 2x_3 - 2 = 4{,}2641 - 2 \cdot 0{,}3 - 2 = 1{,}6641,$

$x_4 = 0{,}4 \quad y_4 = 4{,}6105 \quad y''(x_4) = y_4 - 2x_4 - 2 = 4{,}6105 - 2 \cdot 0{,}4 - 2 = 1{,}8105,$

$x_5 = 0{,}5 \quad y_5 = 4{,}9716 \quad y''(x_5) = y_5 - 2x_5 - 2 = 4{,}9716 - 2 \cdot 0{,}5 - 2 = 1{,}9716.$

Модуль максимального значения второй производной функции на интервале $0 \le x \le 0{,}5$ равен 1,9716.

Пересчитываем h по формуле (3.24):

$$h^2 \le \frac{2\varepsilon}{|y''(0{,}5)|} = \frac{2 \cdot 0{,}01}{1{,}9716} \le 0{,}0101;$$

$$h \le 0{,}1007.$$

Таким образом, расчеты ординат интегральной кривой, выполненные выше при $h = 0{,}1$, сделаны с абсолютной погрешностью, не превышающей $\varepsilon = 0{,}01$.

◆ Пример 3.21

Найти методом Эйлера численное решение дифференциального уравнения $y' = \dfrac{y - x}{y + x}$ при начальных условиях $y(0) = 1$, принимая $h = 0{,}1$. Ограничиться отысканием первых десяти значений.

Решение:

$$f(x,y)=\frac{y-x}{y+x}$$

$x_0=0 \qquad y_0=1.$

$x_1=0{,}1 \qquad y_1=y_0+h\cdot f(x_0,y_0)=1+0{,}1\cdot\frac{1-0}{1+0}=1{,}1,$

$x_2=0{,}2 \qquad y_2=y_1+h\cdot f(x_1,y_1)=1{,}1+0{,}1\cdot\frac{1{,}1-0{,}1}{1{,}1+0{,}1}\approx 1{,}183,$

$x_3=0{,}3 \qquad y_3=y_2+h\cdot f(x_2,y_2)=1{,}183+0{,}1\cdot\frac{1{,}183-0{,}2}{1{,}183+0{,}2}\approx 1{,}254,$

$x_4=0{,}4 \qquad y_4=y_3+h\cdot f(x_3,y_3)=1{,}254+0{,}1\cdot\frac{1{,}254-0{,}3}{1{,}254+0{,}3}\approx 1{,}315,$

$x_5=0{,}5 \qquad y_5=y_4+h\cdot f(x_4,y_4)=1{,}315+0{,}1\cdot\frac{1{,}315-0{,}4}{1{,}315+0{,}4}\approx 1{,}368,$

$x_6=0{,}6 \qquad y_6=y_5+h\cdot f(x_5,y_5)=1{,}368+0{,}1\cdot\frac{1{,}368-0{,}5}{1{,}368+0{,}5}\approx 1{,}414,$

$x_7=0{,}7 \qquad y_7=y_6+h\cdot f(x_6,y_6)=1{,}414+0{,}1\cdot\frac{1{,}414-0{,}6}{1{,}414+0{,}6}\approx 1{,}454,$

$x_8=0{,}8 \qquad y_8=y_7+h\cdot f(x_7,y_7)=1{,}454+0{,}1\cdot\frac{1{,}454-0{,}7}{1{,}454+0{,}7}\approx 1{,}489,$

$x_9=0{,}9 \qquad y_9=y_8+h\cdot f(x_8,y_8)=1{,}489+0{,}1\cdot\frac{1{,}489-0{,}8}{1{,}489+0{,}8}\approx 1{,}519,$

$x_{10}=1 \qquad y_{10}=y_9+h\cdot f(x_9,y_9)=1{,}519+0{,}1\cdot\frac{1{,}519-0{,}9}{1{,}519+0{,}9}\approx 1{,}545.$

Получаем таблицу:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y	1	1,1	1,183	1,254	1,315	1,368	1,414	1,454	1,489	1,519	1,545

◆ Пример 3.22

Применяя метод Эйлера, найти решение дифференциального уравнения $y' = y + (1+x) \cdot y^2$ с начальным условием $y(1) = -1$ на отрезке [1; 1,5]. Шаг h принять равным 0,1.

Решение:

$$x_0 = 1 \qquad y_0 = -1;$$

$$f(x, y) = y + (1+x) \cdot y^2.$$

$x_1 = 1{,}1$ $\qquad y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) =$

$$= -1 + 0{,}1 \cdot (-1 + (1+1) \cdot (-1)^2) = -0{,}9,$$

$x_2 = 1{,}2$ $\qquad y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) =$

$$= -0{,}9 + 0{,}1 \cdot (-0{,}9 + (1+1{,}1) \cdot (-0{,}9)^2) = -0{,}8199,$$

$x_3 = 1{,}3$ $\qquad y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) =$

$$= -0{,}8199 + 0{,}1 \cdot (-0{,}8199 + (1+1{,}2) \cdot (-0{,}8199)^2) \approx$$

$$\approx -0{,}753998,$$

$x_4 = 1{,}4$ $\qquad y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) =$

$$= -0{,}753998 + 0{,}1 \cdot (-0{,}753998 + (1+1{,}3) \cdot$$

$$\cdot (-0{,}753998)^2) \approx -0{,}698640,$$

$x_5 = 1{,}5$ $\qquad y_5 = y_4 + h \cdot f(x_4, y_4) =$

$$= -0{,}698640 + 0{,}1 \cdot (-0{,}698640 + (1+1{,}4) \cdot$$

$$\cdot (-0{,}698640)^2) \approx -0{,}651361.$$

Окончательно получаем таблицу:

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y	–1	–0,9	–0,8199	–0,753998	–0,698640	–0,651361

◆ Пример 3.23

Найти методом Эйлера численное решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y-x}{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y+x}{t} \end{cases}$$

при начальных условиях $x(1)=1$, $y(1)=1$, $1 \le t \le 2$, полагая шаг равным $h=0{,}2$.

Решение:

Полагаем $f_1(x,y,t)=x'$, $f_2(x,y,t)=y'$.

$t_0=1$ $\quad x_0=1$, $y_0=1$.

$t_1=1{,}2$ $\quad x_1 = x_0 + h\cdot f_1(x_0,y_0,t_0) = 1+0{,}2\cdot\dfrac{1-1}{1}=1,$

$$y_1 = y_0 + h\cdot f_2(x_0,y_0,t_0) = 1+0{,}2\cdot\frac{1+1}{1}=1{,}4.$$

$t_2=1{,}4$ $\quad x_2 = x_1 + h\cdot f_1(x_1,y_1,t_1) = 1+0{,}2\cdot\dfrac{1{,}4-1}{1{,}2}\approx 1{,}067,$

$$y_2 = y_1 + h\cdot f_2(x_1,y_1,t_1) = 1{,}4+0{,}2\cdot\frac{1{,}4+1}{1{,}2}=1{,}8.$$

$t_3=1{,}6$ $\quad x_3 = x_2 + h\cdot f_1(x_2,y_2,t_2) =$

$$=1{,}067+0{,}2\cdot\frac{1{,}8-1{,}067}{1{,}4}\approx 1{,}17,$$

$$y_3 = y_2 + h\cdot f_2(x_2,y_2,t_2) =$$

$$=1{,}8+0{,}2\cdot\frac{1{,}067+1{,}8}{1{,}4}\approx 2{,}21.$$

$t_4 = 1{,}8$ $\quad x_4 = x_3 + h \cdot f_1(x_3, y_3, t_3) =$

$$= 1{,}17 + 0{,}2 \cdot \frac{2{,}21 - 1{,}17}{1{,}6} = 1{,}3,$$

$$y_4 = y_3 + h \cdot f_2(x_3, y_3, t_3) =$$

$$= 2{,}21 + 0{,}2 \cdot \frac{1{,}17 + 2{,}21}{1{,}6} \approx 2{,}63.$$

$t_5 = 2$ $\quad x_5 = x_4 + h \cdot f_1(x_4, y_4, t_4) =$

$$= 1{,}3 + 0{,}2 \cdot \frac{2{,}63 - 1{,}3}{1{,}8} \approx 1{,}45,$$

$$y_5 = y_4 + h \cdot f_2(x_4, y_4, t_4) =$$

$$= 2{,}63 + 0{,}2 \cdot \frac{1{,}3 + 2{,}63}{1{,}8} \approx 3{,}06.$$

Получаем таблицу:

t	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
x	1	1	1,07	1,17	1,3	1,45
y	1	1,4	1,8	2,21	2,63	3,06

Задания для самостоятельного решения

- Для заданных дифференциальных уравнений подберите шаг разбиения в методе Эйлера, обеспечивающий абсолютную погрешность вычислений, не превышающую $\varepsilon = 0{,}005$:

57. $\dfrac{dy}{dx} = y - x$, при начальных условиях $y(0) = 1{,}5$;

58. $y' + 2x = 0{,}3y$, при начальных условиях $y(0) = 0{,}5$;

59. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{4}$, при начальных условиях $y(0) = 1$;

60. $\frac{dy}{dx} = x + \frac{2y}{x}$, при начальных условиях $y(1) = 2$;

61. $y' = y^2 + \frac{y}{x}$, при начальных условиях $y(2) = 4$;

62. $y' = 1 + x - \frac{y}{x}$, при начальных условиях $y(1) = 4$;

63. $y' = 4 - x + y^2$, при начальных условиях $y(0) = 1$;

64. $\frac{dy}{dx} = 3x - 2y$, при начальных условиях $y(1) = 3$;

65. $y' = \frac{2 + xy}{x - 2y}$, при начальных условиях $y(1) = 2$;

66. $y' = (x + y)(1 - xy)$, при начальных условиях $y(0) = 1$.

▸ Решить методом Эйлера дифференциальные уравнения. Вычисления провести с абсолютной погрешностью, не превышающей $\varepsilon = 0{,}01$:

67. $\frac{dy}{dx} = 2y - 3x$,	$y(0) = 1{,}5$,	$0 \le x \le 0{,}5$;
68. $y' = 2x + y$,	$y(0{,}5) = 1$,	$0{,}5 \le x \le 1$;
69. $y' = 3y + x^2$,	$y(0) = 0{,}5$,	$0 \le x \le 1$;
70. $y' = 5y - 2x$,	$y(0) = 2$,	$0 \le x \le 0{,}5$;
71. $y' = 2x^2 - y$,	$y(1) = 1$,	$1 \le x \le 2$;
72. $y' - 0{,}5y + 3x = 0$,	$y(0) = 0{,}5$,	$0 \le x \le 1$;
73. $y' + y - 5x = 0$,	$y(1) = 2$,	$1 \le x \le 2$;
74. $\frac{dy}{dx} + 2x - 4y = 0$,	$y(0) = 0{,}5$,	$0 \le x \le 0{,}5$;
75. $\frac{dy}{dx} - 3y - 3x = 0$,	$y(1) = 2$,	$1 \le x \le 1{,}5$;
76. $\frac{dy}{dx} - y - x = 0$,	$y(1{,}5) = 1$,	$1{,}5 \le x \le 2$.

▸ Используя метод Эйлера, составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$ на отрезке $[a, b]$, принять шаг равным $h = 0{,}1$. Вычисления вести с четырьмя десятичными знаками. Аргумент тригонометрических функций выражен в радианах:

77. $y' = x + \cos\dfrac{y}{\sqrt{5}}$, $\quad y_0(1{,}8) = 2{,}6$, $\quad 1{,}8 \le x \le 2{,}8$;

78. $y' = x + \cos\dfrac{y}{3}$, $\quad y_0(1{,}6) = 4{,}6$, $\quad 1{,}6 \le x \le 2{,}6$;

79. $y' = x + \cos\dfrac{y}{\sqrt{3}}$, $\quad y_0(0{,}5) = 0{,}5$, $\quad 0{,}5 \le x \le 1{,}5$;

80. $y' = x + \sin\dfrac{y}{1{,}25}$, $\quad y_0(0{,}4) = 0{,}8$, $\quad 0{,}4 \le x \le 1{,}4$;

81. $y' = x + \sin\dfrac{y}{\sqrt{7}}$, $\quad y_0(0{,}1) = 0{,}8$, $\quad 0{,}1 \le x \le 1{,}1$;

82. $y' = x + \sin\dfrac{y}{\sqrt{10}}$, $\quad y_0(0{,}6) = 0{,}8$, $\quad 0{,}6 \le x \le 1{,}6$;

83. $y' = x + \sin\dfrac{y}{3{,}5}$, $\quad y_0(1{,}6) = 4$, $\quad 1{,}6 \le x \le 2{,}6$;

84. $y' = x + \sin\dfrac{y}{\pi}$, $\quad y_0(1{,}7) = 5{,}3$, $\quad 1{,}7 \le x \le 2{,}7$;

85. $y' = x + \cos\dfrac{y}{\pi}$, $\quad y_0(1{,}7) = 5{,}3$, $\quad 1{,}7 \le x \le 2{,}7$;

86. $y' = x + \cos\dfrac{y}{\sqrt{11}}$, $\quad y_0(2{,}1) = 2{,}5$, $\quad 2{,}1 \le x \le 3{,}1$.

▸ Применяя метод Эйлера, численно решить дифференциальные уравнения с данными начальными условиями с шагом h и $\dfrac{h}{2}$:

87. $y' = \frac{x+y}{y-x}$, $y(0)=1$, $h=0{,}1$, $0 \le x \le 1$;

88. $y' = \frac{6-x^2y^2}{x^2}$, $y(1)=2$, $h=0{,}05$, $1 \le x \le 1{,}5$;

89. $y' = -\frac{xy}{\sqrt{1-x^2}}$, $y(0)=e$, $h=0{,}05$, $0 \le x \le 0{,}5$;

90. $y' = \frac{1}{\cos x} - \frac{y \cdot \sin x}{\cos x}$, $y(0)=0$, $h=0{,}1$, $0 \le x \le 1$;

91. $y' = \frac{3y}{2x} + \frac{3}{2}xy$, $y(1)=0$, $h=0{,}1$, $1 \le x \le 2$;

92. $y' = \frac{2xy^3}{1-x^2y^2}$, $y(2)=1$, $h=0{,}05$, $2 \le x \le 2{,}5$;

93. $y' = \frac{y^2 \ln x - y}{x}$, $y(1)=1$, $h=0{,}1$, $1 \le x \le 1{,}5$;

94. $y' = \frac{y}{x} - 0{,}25y^2$, $y(1)=2$, $h=0{,}1$, $1 \le x \le 2$;

95. $y' = \frac{1}{x^2} - 2y^2$, $y(1)=2$, $h=0{,}1$, $1 \le x \le 2$;

96. $y' = 1 + x + y^2$, $y(0)=1$, $h=0{,}1$, $0 \le x \le 0{,}5$.

Глава 4 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

4.1. Случайные события и их вероятности

4.1.1. Случайные события

Теория вероятностей — это раздел математики изучающий закономерности массовых случайных событий.

Случайным называется событие, наступление которого нельзя гарантировать. Случайность того или иного события определяется множеством причин, которые существуют объективно, но учесть их все, а также степень их влияния на изучаемое событие, невозможно. К таким случайным событиям относятся: выпадание того или иного числа при бросании игральной кости, выигрыш в лотереи, количество больных, записавшихся на прием к врачу и т.п.

И хотя в каждом конкретном случае трудно предсказать исход испытания, при достаточно большом числе наблюдений можно установить наличие некоторой закономерности. Подбрасывая монету, можно заметить, что число выпадания орла и решки примерно одинаково, а при бросании игральной кости различные грани также появляются, примерно одинаково. Это говорит о том, что случайным явлениям присущи свои закономерности, но они проявляются лишь при большом количестве испытаний. Правильность этого подтверждает закон больших чисел, который лежит в основе теории вероятностей.

Рассмотрим основные термины и понятия теории вероятностей.

Испытанием называется совокупность условий, при которых может произойти данное случайное событие.

Событие — это факт, который при осуществлении определенных условий может произойти или нет. События обозначают большими буквами латинского алфавита A, B, C...

Например, событие A — рождение мальчика, событие B — выигрыш в лотерее, событие C — выпадение цифры 4 при бросании игральной кости.

События бывают достоверные, невозможные и случайные.

Достоверное событие — это событие, которое в результате испытания непременно должно произойти.

Например, если на игральной кости на всех шести гранях нанести цифру 1, тогда выпадение цифры 1, при бросании кости, есть событие достоверное.

Невозможное событие — это событие, которое в результате испытания не может произойти.

Например, в ранее рассмотренном примере — это выпадение любой цифры, кроме 1.

Случайное событие — это событие, которое при испытаниях может произойти или не произойти. Те или иные события реализуются с различной возможностью.

Например, завтра днем ожидается дождь. В этом примере наступление дня является испытанием, а выпадение дождя — случайное событие.

События называются *несовместными*, если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого.

Например, при бросании монеты выпадение одновременно орла и решки есть события несовместные.

События называются *совместными*, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появление другого.

Например, при игре в карты появление валета и масти пик — события совместные.

События называются *равновозможными*, если нет оснований считать, что одно из них происходит чаще, чем другое.

Например, выпадение любой грани игрального кубика есть равновозможные события.

События образуют *полную группу событий*, если в результате испытания обязательно произойдет хотя бы одно из них и любые два из них несовместны.

Например, при 10 выстрелах в мишень возможно от 0 до 10 попаданий. При бросании игрального кубика может выпасть цифра от 1 до 6. Эти события образуют полную группу.

События, входящие в полную группу попарно несовместных и равновозможных событий, называются *исходами*, или *элементарными событиями*. Согласно определению достоверного события, можно считать, что событие, состоящее в появлении одного, неважно какого, из событий полной группы, есть событие достоверное.

Например, при бросанни одного игрального кубика выпадает число меньше семи. Это пример достоверного события.

Частным случаем событий, образующих полную группу, являются противоположные события.

Два несовместных события A и $\overline{A}$ (читается «не A») называются *противоположными*, если в результате испытания одно из них должно обязательно произойти.

Например, если стинендия начисляется только нри получении на экзамене хороших и отличных оценок, то события «стипендия» и «неудовлетворительная или удовлетворительная оценка» — противоположные.

Событие A называется *благоприятствующим* событию B, если появление события A влечет за собой появление события B.

Например, при бросании игрального кубика появлению нечетного числа благоприятствуют события, связанные с выпадением чисел 1, 3 и 5.

4.1.2. Операции над событиями

Операции над событиями аналогичны операциям над множествами, рассмотренными в главе 1.

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.

Сумма событий может быть обозначена знаками «+», «∪», «или».

На рисунке 4.1 представлена геометрическая интерпретация с помощью диаграмм Эйлера–Венна. Сумме событий $A + B$ будет соответствовать вся заштрихованная область.

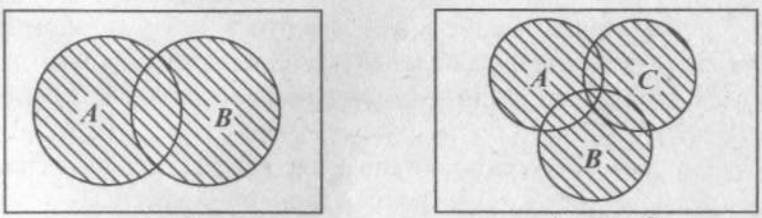


Рис. 4.1

Область пересечения событий A и B соответствует совместным событиям, которые могут произойти одновременно. Аналогично для событий A, B и C имеются совместные события A и B; A и C; B и C; A и B и C, которые могут произойти одновременно.

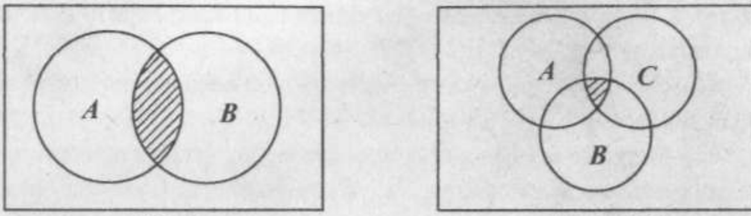
Например, в урне находятся белые, красные и синие шары. Возможны следующие события: A — вынут белый шар; B — вынут красный шар; C — вынут синий шар. Событие $B + C$ означает, что произошло событие — вынут цветной шар или вынут не белый шар.

Произведением нескольких событий называется событие, которое состоит в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.

10. Зак. 649

Произведение событий может быть обозначено знаками «×», «∩», «и».

Геометрическая интерпретация произведения событий представлена на рис. 4.2.



$A \times B$ $\qquad$ $A \times B \times C$

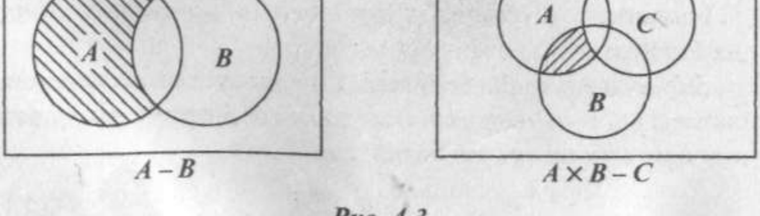
Рис. 4.2

Произведением событий A и B будет заштрихованная область пересечения площадей A и B. А для трех событий A и B и C — общая площадь, одновременно входящая во все три события.

Например, пусть из колоды карт наугад извлекается карта. Событие A — вынута карта пиковой масти; B — вынут валет. Тогда событие $A \times B$ означает событие — вынут валет пик.

Разностью двух событий $A–B$ называется событие, состоящее из исходов, входящих в A, но не входящих в B.

На рис. 4.3 представлена иллюстрация разности событий с помощью диаграмм Эйлера–Венна.



$A - B$ $\qquad$ $A \times B - C$

Рис. 4.3

Разностью двух событий $A - B$ является заштрихованная область A без той части, которая входит в событие B. Разность между произведением событий A и B и событием C будет совместная площадь события A и события B без совместной с нею площадью события C.

Например, пусть при бросании игрального кубика событие A — появление четных чисел (2, 4, 6), а событие B — чисел кратных 3, т.е. (3, 6). Тогда событие $A - B$ появление чисел (2, 4).

4.1.3. Определение вероятности события

Случайные события реализуются с различной возможностью. Одни происходят чаще, другие — реже. Для количественной оценки возможностей реализации события вводится понятие *вероятности события.*

Вероятность события — это число, характеризующее степень возможности появления события при многократном повторении испытаний.

Вероятность обозначается буквой P (от англ. *probability* — вероятность). Вероятность является одним из основных понятий теории вероятностей. Существует несколько определений этого понятия.

Классическое определение вероятности заключается в следующем. Если известны все возможные исходы испытания и нет оснований считать, что одно случайное событие появлялось бы чаще других, т.е. события равновозможны и несовместны, то имеется возможность аналитического определения вероятности события.

Вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа благоприятствующих исходов m к общему числу равновозможных несовместных исходов n:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{4.1}$$

Свойства вероятности:

1. Вероятность случайного события A находится между 0 и 1.

$$0 \le P(A) \le 1.$$

2. Вероятность достоверного события равна 1.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

3. Вероятность невозможного события равна 0.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

◆ Пример 4.1

Найти вероятность выпадения числа, кратного 3, при одном бросании игрального кубика.

Решение:

Событие A — выпадение числа, кратного 3. Этому событию благоприятствуют два исхода: числа 3 и 6, т.е. $m = 2$. Общее число исходов состоит в выпадении чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, т.е. $n = 6$. Очевидно, что эти события равновозможны и образуют полную группу. Тогда искомая вероятность, по определению, равна отношению числа благоприятствующих исходов к числу всех исходов.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

◆ Пример 4.2

В урне 10 белых, 5 красных и 5 зеленых шаров. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет цветным (не белым).

Решение:

Число исходов, благоприятствующих событию A, равно сумме красных и зеленых шаров: $m = 10$. Общее число равновозможных несовместных исходов равно общему числу шаров в урне: $n = 20$. Тогда:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{20} = 0{,}5.$$

При определении вероятности события, по ее классическому определению, требуется выполнение определенных условий. Эти условия заключаются в равновозможности и несовместности событий, входящих в полную группу событий, вероятность которых надо определить. На практике не всегда можно определить все возможные варианты исходов, а тем более обосновать их равновозможность. Поэтому при невозможности удовлетворения требованиям классического определения вероятности используют статистическую оценку вероятности события. При этом вводится понятие *относительной частоты* появления события A, равной отношению m/n, где m — число испытаний, в которых произошло событие A; n — общее число испытаний.

Я. Бернулли доказал, что при неограниченном увеличении числа испытаний относительная частота события A будет сколь угодно мало отличать от вероятности события A.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{m}{n} = P(A).$$

Это равенство справедливо при неизменности условий, при которых проводится эксперимент.

Справедливость теоремы Бернулли была доказана и в многочисленных опытах по сравнению вероятностей, вычисленных классическим и статистическим методами. Так, в опытах Пирсона, по определению вероятности выпадения «герба» при выполнении 12 000 бросков, статистическая вероятность была равна 0,5016, а при 24 000 бросков — 0,5005, что показывает приближение к значению вероятности 0,5 по мере увеличения числа опытов. Близость значений вероятности, определенных различными способами, указывают на объективность возможности наступления этого события.

4.1.4. Теорема сложения вероятностей

Зная вероятности одних событий, можно вычислить вероятности других, если они связаны между собой. Теорема сложения вероятностей позволяет определить вероятность появления одного из нескольких случайных событий.

Теорема. *Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{4.2}$$

Доказательство. Пусть n — общее число равновозможных несовместных элементарных исходов; m_1 — число исходов благоприятствующих событию A; m_2 — число исходов, благоприятствующих событию B. Так как A и B несовместные события, то событию $A + B$ будет благоприятствовать $m_1 + m_2$ исходов. Тогда, согласно классическому определению вероятности:

$$P(A+B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B).$$

Расширяя это доказательство на n событий, можно доказать следующую теорему.

Теорема. *Вероятность суммы конечного числа попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна сумме вероятностей этих событий, т.е.*

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \tag{4.3}$$

Из этой теоремы можно вывести два следствия:

Следствие 1. *Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице, т.е.*

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1. \tag{4.4}$$

Доказательство. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу, то наступление хотя бы одного из них есть событие достоверное. Следовательно,

$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1$ и

$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т.е.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Доказательство. Противоположные события несовместны и образуют полную группу, а сумма вероятностей таких событий равна 1.

◆ Пример 4.3

Найти вероятность выпадения цифры 2 или 3 при бросании игральной кости.

Решение:

Событие A — выпадение цифры 2, вероятность этого события $P(A) = \frac{1}{6}$. Событие B — выпадение цифры 3, вероятность этого события $P(B) = \frac{1}{6}$. События несовместные, поэтому

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

◆ Пример 4.4

Получена партия одежды в количестве 40 штук. Из них 20 комплектов мужской одежды, 6 — женской и 14 — детской. Найти вероятность того, что взятая наугад одежда окажется не женской.

Решение:

Событие A — одежда мужская, вероятность

$P(A) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$.

Событие B — одежда женская, $P(B) = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$.

Событие C — одежда детская, $P(C) = \frac{14}{40} = \frac{7}{20}$.

Тогда $P(A + C) = P(A) + P(C) = \frac{1}{2} + \frac{7}{20} = \frac{17}{20}$.

В том случае, если события A и B являются совместными, то справедлива следующая теорема.

Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления, т.е.*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\times B). \qquad (4.5)$$

Доказательство. Пусть для полной группы событий, имеющих n исходов, m_1 исходов благоприятствуют событию A, m_2 — событию B, а l исходов благоприятствуют как событию A, так и событию B, тогда

$$P(A)=\frac{m_1}{n}; \qquad P(B)=\frac{m_2}{n}; \qquad P(A\times B)=\frac{l}{n}.$$

Так как событие $A+B$ состоит в том, что произошло событие A, либо событие B, либо событие A и B. Поэтому ему будет благоприятствовать m_1+m_2-l исходов.

Следовательно,

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2-l}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}-\frac{l}{n}=$$
$$=P(A)+P(B)-P(A\times B).$$

◆ Пример 4.5

Вероятность попадания в мишень одного стрелка равна 0,65, а второго — 0,6. Определить вероятность поражения мишени при одновременных выстрелах двух стрелков.

Решение:

Так как при стрельбе возможно попадание в мишень двумя стрелками, то эти события совместные. Следовательно,

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\times B)=0,65+0,6-0,39=0,86.$$

4.1.5. Теорема умножения вероятностей

Событие A называется *независимым* от события B, если вероятность осуществления события A не зависит от того, произошло событие B или нет.

Например, при повторении бросания игральной кости вероятность выпадения цифры 1 (событие A) не зависит от появления или не появления цифры 1 при первом бросании кости (событие B).

Событие A называется *зависимым* от события B, если его вероятность меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Например, если в урне находятся черные и белые шары, то вероятность повторного появления черного шара (событие A) будет зависеть от того, какой шар вынули первый раз.

В случае зависимых событий A и B вводится понятие *условной вероятности*, под которой понимается вероятность события A при условии, что событие В произошло. Обозначается $P(A/B)$.

◆ Пример 4.6

В урне находится 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Первым был вынут черный шар, найти вероятность того, что второй шар будет черным.

Решение:

Вероятность появления чериого шара первый раз (событие B) равно $P(B) = 3/10$; а вероятность появления его второй раз (событие А), при условии, что событие В произошло, равно $P(A/B) = 2/9$, так как в урне осталось 9 шаров, из них 2 черных.

Рассмотрим закон умножения вероятностей для независимых событий.

Произведением двух событий A и B называют событие $C = A \times B$, состоящее в совместном осуществлении этих событий.

Теорема. *Вероятность произведения 2 независимых событий А и В равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(A \text{ и } B) = P(A \times B) = P(A) \cdot P(B).$$

Этот закон справедлив и для n независимых событий.

$$P(A_1 \cdot A_2 ... A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n). \qquad (4.6)$$

◆ Пример 4.7

В билете 3 раздела. Из 40 вопросов первого раздела студент знает 30 вопросов, из 30 вопросов второго — 15, из 30 вопросов третьего — 10. Определить вероятность правильного ответа студента по билету.

Решение:

Учитывая, что ответ на каждые разделы есть независимые события A_1, A_2 и A_3, а их вероятности соответственно равны:

$$P(A_1) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}; \quad P(A_2) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}; \quad P(A_3) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Тогда вероятность правильного ответа на билет $P(B)$, можно найти по формуле (4.6).

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

Теорема. *Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению одного из них на условную вероятность второго, вычисленную при условии, что первое событие осуществилось.*

$$P(A \text{ и } B) = P(A \times B) = P(A) \cdot P(B/A). \qquad (4.7)$$

Формула умножения вероятностей может быть обобщена на случай n событий $A_1, A_2, ..., A_n$:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) =$$
$$= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/(A_1A_2))... P(A_n/(A_1A_2...A_{n-1})).$$

Причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие произошли.

◆ **Пример 4.8**

В группе из 20 человек 5 студентов не подготовили задание. Какова вероятность того, что два первых студента, вызванные наугад, будут не готовы к ответу.

Решение:

Вероятность того, что первый студент не готов к ответу $P(A) = 5/20$, вероятность того, что и второй студент также не подготовлен, как и первый, $P(B/A) = 4/19$, тогда для ответа на вопрос воспользуемся формулой:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} = \frac{20}{380} \approx 0{,}05.$$

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если каждое из этих событий и событие, равное произведению любого числа остальных событий, независимы.

Теорема. ***Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$, т.е.***

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\ldots P(\overline{A}_n). \quad (4.8)$$

◆ **Пример 4.9**

В трех театральных кассах продаются билеты. Вероятность наличия билетов за час до начала спектакля в первом театре равна 0,7, в кассе второго — 0,3, а в кассе третьего — 0,5. Какова вероятность того, что за час до начала спектакля имеется возможность купить билет хотя бы в одной кассе.

Решение:

Событие A — возможность купить билеты хотя бы в одной кассе. Тогда противоположное событие обозначим $\overline{A}$. Оно наступит тогда, когда наступит событие $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$. Тогда

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\ldots P(\overline{A}_n) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}895.$$

◆ Пример 4.10

Вероятность попадания в цель при стрельбе из трех орудий такова: $P_1 = 0{,}75$; $P_2 = 0{,}8$; $P_3 = 0{,}85$. Какова вероятность хотя бы одного попадания (событие A) при одном залпе из всех орудий?

Решение:

$$g_1 = 1 - P_1 = 1 - 0{,}75 = 0{,}25;$$
$$g_2 = 1 - P_2 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;$$
$$g_3 = 1 - P_3 = 1 - 0{,}85 = 0{,}15;$$
$$P(A) = 1 - g_1 \cdot g_2 \cdot g_3;$$
$$P(A) = 1 - 0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}15 = 0{,}9925.$$

◆ Пример 4.11

Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго — 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один стрелок.

Решение:

Вероятность того, что в мишень попадает первый стрелок и не попадает второй, равна:

$$P(A_1 \overline{A}_2) = 0{,}7 \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}14.$$

Вероятность того, что попадет второй стрелок в мишень и не попадет первый, равна:

$$P(\overline{A}_1 A_2) = (1 - 0{,}7) \cdot 0{,}8 = 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24.$$

Вероятность того, что в мишень попадет только один стрелок, равна сумме этих вероятностей:

$$P(A_1 \overline{A}_2) + P(\overline{A}_1 A_2) = 0{,}14 + 0{,}24 = 0{,}38.$$

4.1.6. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Следствием основных законов сложения и умножения вероятностей является формула полной вероятности.

Пусть требуется найти вероятность некоторого события B, которое может произойти вместе с одним из событий A_1, A_2, ... A_n, образующих полную группу несовместных событий. Так как события $A_1, A_2, \ldots A_n$ образуют полную группу, то событие В может произойти только в комбинации с каким-либо из них:

$$B = A_1B + A_2B + \ldots + A_nB.$$

Так как событие $A_1, A_2, \ldots A_n$ несовместны, то и комбинации A_1B, A_2B, A_nB несовместны.

Согласно закону сложения несовместных событий имеем:

$$P(B) = P(A_1B) + P(A_2B) + \ldots P(A_nB).$$

Каждое из слагаемых является вероятностью произведения двух зависимых событий.

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \ldots + P(A_n)\, P(B/A).$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)\,. \qquad (4.9)$$

Теорема. *Вероятность события В, которое может наступить только при условии появления одного из событий A_1, A_2, ..., A_n, образующих полную группу попарно несовместных событий, равна сумме произведений вероятностей каждого из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на соответствующую условную вероятность события В.*

Полученная формула называется *формулой полной вероятности*, а события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — *гипотезами*.

◆ Пример 4.12

На склад ежедневно поступают детали с трех предприятий. С первого — 30 деталей, со второго — 20 и с третьего — 40. Установлено, что 2, 4 и 5% продукции этих предприятий, соответственно, имеют дефекты. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь будет дефектна.

Решение:

Обозначим: B — взятая наугад деталь дефектна; A_1 — деталь изготовлена на первом предприятии, A_2 — деталь изготовлена на втором предприятии, A_3 — деталь изготовлена на третьем предприятии. События A_1, A_2 и A_3 образуют полную группу несовместных событий и

$$P(A_1)=\frac{30}{90}=\frac{1}{3};\ P(A_2)=\frac{20}{90}=\frac{2}{9};\ P(A_3)=\frac{40}{90}=\frac{4}{9}.$$

Условные вероятности события В равны:

$$P(B/A_1)=0{,}02;\ P(B/A_2)=0{,}04;\ P(B/A_3)=0{,}05.$$

Тогда

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+P(A_3)\cdot P(B/A_3)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 0{,}02+\frac{2}{9}\cdot 0{,}04+\frac{4}{9}\cdot 0{,}05=0{,}0378.$$

С формулой полной вероятности тесно связана *формула Байеса*, названная по имени английского математика Томаса Байеса (1702–1761). Формула Байеса позволяет переоценить вероятности гипотез после того, как в результате опыта произошло событие B.

Пусть имеется полная группа несовместных событий $A_1, A_2,\dots, A_n$. Вероятности этих событий до опыта (априорные) известны и равны соответственно $P(A_1), P(A_2),\dots, P(A_n)$. В результате проведения опыта произошло событие B. Необходимо найти апостериорные (после опыта) вероятности событий A_i, т.е. следует определить условную вероятность $P(A_i/B)$.

Согласно закону умножения вероятностей имеем:

$$P(BA_i)=P(B)P(A_i/B)=P(A_i)P(B/A_i);$$

Тогда: $P(B)P(A_i/B)=P(A_i)P(B/A_i)$;

Отсюда $P(A_i/B)=\dfrac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)}$.

Выражая $P(B)$ с помощью формулы полной вероятности, имеем:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}. \qquad (4.10)$$

◆ Пример 4.13

Имеются три урны: в первой из них 5 белых шаров и 4 черных; во второй — 3 белых и 6 черных; в третьей — 2 белых и 7 черных. Из выбранной наугад урны вынимают шар. Он оказался черным. Найти вероятность того, что этот шар вынут из первой, второй или третьей урны.

Решение:

Гипотезы: A_1 — выбор первой урны; A_2 — выбор второй урны; A_3 — выбор третьей урны. До опыта все гипотезы равновероятны:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}.$$

Событие B — появление черного шара. Условные вероятности этого события равны:

$$P(B/A_1) = \frac{4}{9};\ P(B/A_2) = \frac{6}{9};\ P(B/A_3) = \frac{7}{9}.$$

Тогда по формуле Байеса имеем:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}+\frac{6}{9}+\frac{7}{9}\right)} = \frac{4}{17} \approx 0,235;$$

$$P(A_2/B) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{9}}{\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}+\frac{6}{9}+\frac{7}{9}\right)} = \frac{6}{17} \approx 0,333;$$

$$P(A_3/B)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{9}}{\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}+\frac{6}{9}+\frac{7}{9}\right)}=\frac{7}{17}\approx 0{,}412.$$

Таким образом, наиболее вероятным был выбор третьей урны.

Задания для самостоятельного решения

Классическое определение вероятности

1. Из букв слова «вероятность» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что выбранная буква будет: А — согласной; В — гласной; С — буква «о».

2. Все натуральные числа от 1 до 30 написаны на одинаковых карточках и положены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?

3. Бросаются две монеты. Какова вероятность, что обе монеты упадут «решкой» кверху:

4. В урне 6 белых и 4 черных шаров. Из урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны вынимают еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

5. Из урны, содержащей 10 белых шаров и 8 черных, вынимают подряд все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.

6. В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором — с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынули по одному шару. Найти вероятности следующих событий:

А — сумма номеров вынутых шаров не меньше 7;

В — сумма номеров вынутых шаров равна 11;

С — сумма номеров вынутых шаров не больше 11.

7. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятность следующих событий:

А — появление не менее 4 очков;

В — появление не более 4 очков.

8. Игральная кость бросается два раза. Найти вероятность того, что оба раза появится одинаковое число очков.

9. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятности следующих событий:

А — сумма выпавших очков равна 6;

В — произведение выпавших очков равно 6.

10. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что абсолютная величина разности выпавших очков равна 2?

11. В лотерее 1000 билетов. Из них на два билета выпадает выигрыш 200 рублей, на четыре билета — 100 рублей, на десять — по 20 рублей, на тридцать — по 10 рублей, на пятьдесят — по 5 рублей, на 200 билетов — по 1 рублю, остальные билеты без выигрыша. Какова вероятность выиграть по билету не менее 5 рублей?

12. Произвольным образом выбирается двузначное число. Какова вероятность того, что это число окажется:

А — кратным 3;

В — кратным 6;

С — кратным 50.

13. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 10. Какова вероятность того, что это число является простым?

14. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наугад. Какова вероятность того, что набранная цифра правильная?

15. На странице книги имеется 2 500 букв. Буква «а» встречается 190 раз. Какова вероятность того, что случайно выбранная буква не есть буква «а»?

▸ *Теоремы сложения и умножения вероятностей*

16. В ящике находятся пуговицы различных цветов: белых — 50%; красных — 20%; зеленых — 20%; синих — 10%. Какова вероятность того, что взятая наугад пуговица окажется синего или зеленого цвета.

17. Вероятность того, что стрелок, произведя выстрел, выбивает 10 очков, равна 0,4; 9 очков — 0,3 и, наконец, 8 или меньше очков — 0,3. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет не менее 9 очков.

18. В магазин поступили телевизоры, 60% которых поставило первое предприятие, 25% — второе и 15% — третье. Какова вероятность того, что купленный телевизор изготовлен на первом или третьем предприятии.

19. При записи фамилий участников соревнований, общее число которых 420, оказалось, что начальной буквой фамилий у 10 из них была «А», у 6 — «Е», у 9 — «И», у 12 — «О», у 5 — «У», у 3 — «Ю», у всех остальных фамилия начиналась с согласной. Определить вероятность того, что фамилия участника начинается с гласной.

20. Вероятность попадания в мишень для первого спортсмена 0,85, а для второго — 0,8. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Найти вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один спортсмен.

21. Один стрелок поражает цель с вероятностью 90%, другой — с вероятностью 75%. Найти вероятность поражения цели, если оба стрелка стреляют в нее одновременно. Цель считается пораженной при попадании в нее хотя бы одной из двух пуль.

22. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Какова вероятность того, что будет вынута пика или туз?

23. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет четное или кратное трем число очков.

24. Консультационный пункт университета получает пакеты с контрольными работами из городов *A*, *B* и *C*. Вероятность получения пакета из города A равна 0,6, а из города B — 0,1. Найти вероятность того, что очередной пакет будет получен из города C.

25. С первого предприятия поступило 200 пробирок, из которых 190 стандартных, а со второго — 300, из которых 280 стандартных. Найти вероятность того, что взятая наудачу пробирка будет стандартной.

26. Найти вероятность того, что взятое наудачу двузначное число окажется кратным либо 2, либо 5, либо тому и другому одновременно.

27. В ящике имеются 30 шаров белого цвета и 5 — черного. Из ящика наудачу берут один за другим 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара окажутся черными.

28. В мастерской два мастера работают независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа первый мотор не потребует внимание мастера, равна 0,9, для второго мотора эта вероятность равна 0,89. Найти вероятность того, что в течение часа ни один из моторов не потребует внимание мастера.

29. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго — 0,8, для третьего — 0,9. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.

30. В условиях предыдущей задачи определить вероятность того, что в цель попадет хотя бы один стрелок.

31. В урне 5 белых и 10 черных шаров. Из урны вынимается один шар, отмечается его цвет и шар возвращается в урну. После этого из урны берется еще один шар. Найти вероятность того, что оба вынутые шара будут белыми.

32. В урне 3 белых и 6 черных шаров. Из урны вынимаются сразу два шара. Найти вероятность того, что эти шары будут разных цветов.

33. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 24. Какова вероятность сдать зачет, если после отказа отвечать на вопрос преподаватель задает еще один вопрос?

34. Вероятность того, что в течение одного рабочего дня возникнет неполадка в определенном медицинском приборе равна 0,05. Какова вероятность того, что не произойдет ни одной неполадки за 3 рабочих дня?

35. Три охотника одновременно стреляют в зайца. Шанс на успех первого охотника расценивается как 3 из 5; второго — 3 из 10; наконец, для третьего охотника они составляют лишь 1 из 10. Какова вероятность того, что заяц будет подстрелен?

36. Вероятность того, что в летнюю сессию студент сдаст первый экзамен, равна 0,8; второй — 0,9; третий — 0,8. Найти вероятность того, что он сдаст только первый экзамен.

37. Предположим, что в некоторой семье имеется 2 ребенка. 1) Какова вероятность того, что оба ребенка — девочки? 2) Если известно, что, по крайней мере, один ребенок девочка, то какова вероятность того, что обе — девочки? 3) Если известно, что старший ребенок — девочка, то какова вероятность, что оба ребенка девочки?

38. Вероятность того, что в летнюю сессию студент сдаст первый экзамен, равна 0,8; второй — 0,9; третий — 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст хотя бы один экзамен.

39. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

40. Отдел технического контроля проверяет медицинское изделие на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

4.2. Случайная величина

Случайной называют величину, которая принимает в результате испытания то или иное возможное значение, заранее не известное, меняющееся от испытания к испытанию и зависящее от случайных обстоятельств.

Случайные величины могут быть дискретными и непрерывными.

Дискретной называют такую случайную величину, которая принимает счетное множество значений, т.е. такое множество, элементы которого можно подсчитать. Примером дискретной величины является количество студентов на лекции, число бракованных изделий в поставленной продукции, число новорожденных за сутки.

Непрерывной называют такую случайную величину, которая может принимать любые значения в определенном интервале. Занумеровать все значения величины, попадающие даже в узкий интервал, принципиально невозможно. Эти значения образуют несчетное бесконечное множество. **Например,** температура тела пациента за определенный промежуток времени; дальность полета футбольного мяча, объем утечки воды из городского водопровода.

Случайные величины обозначают прописными буквами латинского алфавита X, Y, Z, а их возможное значение — соответствующими строчными буквами x, y, z.

При многократных испытаниях определенные значения случайной величины могут встречаться несколько раз. Поэтому для задания случайной величины недостаточно перечислить лишь все ее возможные значения. Необходимо также знать, как часто могут появляться те или иные значения в результате испытания при одних и тех же условиях, т.е. нужно задать вероятности их появления.

4.2.1. Распределение дискретных и непрерывных случайных величин

Случайная величина считается заданной, если известен закон распределения случайной величины.

Распределением (законом) случайной величины называется всякое соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствуюшими им вероятностями.

Распределение дискретной случайной величины может быть задано в виде таблицы, в графическом и аналитическом виде.

Пусть дискретная случайная величина X принимает значения $X=x_1, X=x_2, \ldots, X=x_n$. Обозначим вероятности этих событий соответственно: $P(X=x_1)=p_1$, $P(X=x_2)=p_2, \ldots$, $P(X=x_n)=p_n$.

Таблица, содержащая возможные значения случайной величины и соответствующие вероятности, является простейшей формой задания распределения дискретной случайной величины:

Значение случайной величины x_i	x_1	x_2	…	x_n
Вероятности значений p_i	p_1	p_2	…	p_n

Так как в результате испытания случайная величина X всегда примет одно из своих возможных значений $x_1, x_2, \ldots$ x_n, то эти случайные события образуют полную группу событий и

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Табличную формулу задания называют также рядом распределения. Для наглядности ряд распределения можно представить в графическом виде, где по оси абсцисс откладываются значения случайной величины, а по оси ординат вероятности этих значений.

◆ Пример 4.14

Построить график ряда распределения значений частоты пульса в гипотетической группе из 47 человек (табл. 4.1)

Таблица 4.1

Распределение частоты пульса в группе из 47 человек

Значения случайной величины уд./мин	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
Значения вероятности $p(x_i)$	$\frac{2}{47}$	$\frac{2}{47}$	$\frac{4}{47}$	$\frac{5}{47}$	$\frac{7}{47}$	$\frac{7}{47}$	$\frac{6}{47}$	$\frac{4}{47}$	$\frac{4}{47}$	$\frac{3}{47}$	$\frac{3}{47}$

Решение:

По данным таблицы построен график (рис. 4.4), который называется *многоугольником распределения вероятностей.*

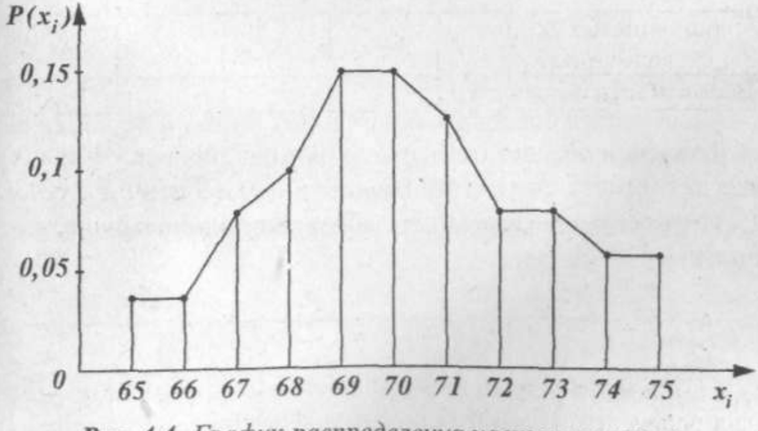


Рис. 4.4. График распределения частоты пульса в группе из 47 человек

В ряде практических случаев вместо вероятности того, что случайная величина X принимает некоторое определенное значение x_i, необходимо знать, что случайная величина X меньше x_i. Эта вероятность задается интегральной функцией распределения.

Функция распределения определяет вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньшее фиксированного действительного числа x, т. е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Функцию распределения $F(x)$ иногда называют *интегральной функцией распределения*, или *интегральным законом распределения*.

Функцию $F(x)$ можно получить, суммируя значения вероятностей по тем значениям случайной величины, которые меньше x_i, т. е.

$$F(x_i) = P(X < x_i) = \sum_{x<x_i} P(x_i).$$

где неравенство $x<x_i$ под знаком суммы показывает, что суммирование распространяется на все значения x, меньше x_i.

◆ Пример 4.15

Используя данные таблицы 4.1, получить интегральную функцию распределения частоты пульса.

Решение:

Интегральная функция распределения частоты пульса в группе из 47 человек.

Таблица 4.2

Значения случайной величины x_i, уд./мин	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76
$F(x_i)$	0	$\frac{2}{47}$	$\frac{4}{47}$	$\frac{8}{47}$	$\frac{13}{47}$	$\frac{20}{47}$	$\frac{27}{47}$	$\frac{33}{47}$	$\frac{37}{47}$	$\frac{41}{47}$	$\frac{44}{47}$	1

Значения $F(x)$ в таблице 4.2 получены следующим образом. Вероятность того, что $P(X<65) = 0$, так как значений меньше 65 нет.

Тогда:

при $x \le 65$ $F(x) = P(x<65) = 0$ (в том числе и при $x = 65$);

при $65 < x \le 66$ $F(x) = P(x<66) = P(x = 65) = \frac{2}{47}$
(в том числе и при $x = 66$);

при $66 < x \le 67$ $F(x) = P(x < 67) = P(x = 65) + P(x = 66) = \frac{4}{47}$
(в том числе и при $x = 67$);

. . . .

при $x > 75$ $F(x) = P(x < 76) = P(x = 65) + P(x = 66) + \ldots$
$+ P(x = 75) = 1$.

График интегральной функции, по данным таблицы 4.2, приведен на рис. 4.5.

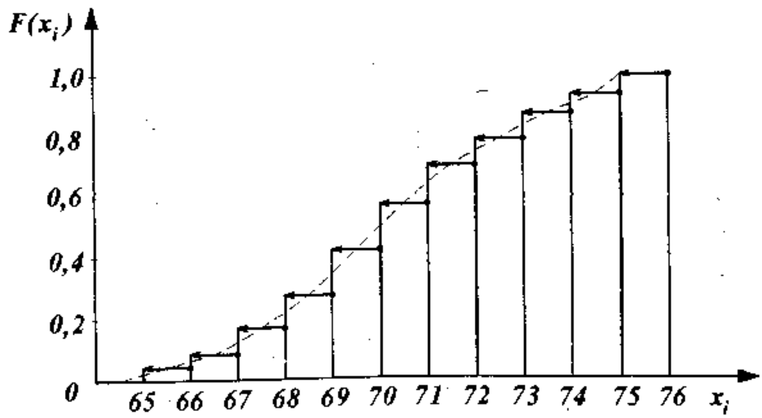


Рис. 4.5. График интегральной функции распределения частоты пульса

Для дискретной случайной величины график функции распределения представляет собой разрывную ступенчатую функцию. Когда переменная x принимает какое-нибудь из своих возможных значений, функция распределения увеличивается скачкообразно на величину вероятности этого значения. Причем при подходе слева к точкам разрыва функция сохраняет свое значение. На графике это отмечено черной точкой. Сумма величин всех скачков функции $F(x)$ равна 1.

Свойства функции распределения

1. Функция распределения случайной величины есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. Функция распределения случайной величины есть неубывающая функция на всей числовой оси, и для любых $\alpha < \beta$ выполняется равенство:

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

3. На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности — единице, т.е.

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \text{ и } \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

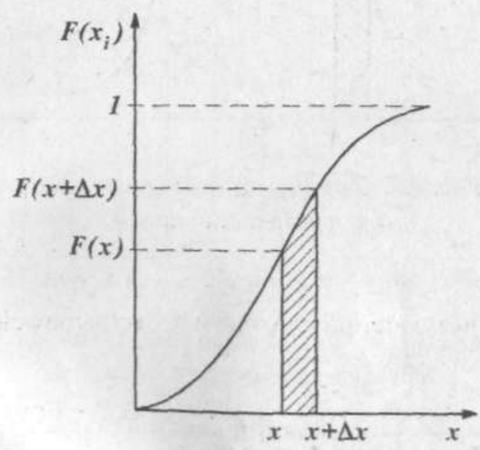


Рис. 4.6. Функция распределения непрерывной случайной величины

При возрастании числа значений случайной величины ($n \to \infty$) и увеличении количества интервалов на графике, уменьшаются их ширины ($\Delta x \to 0$) и функция распределения вместо ступенчатого, принимает плавный характер (пунктир на рис. 4.5).

Таким образом, интегральная функция распределения применяется для описания всех случайных величин — как дискретных, так и непрерывных.

Согласно свойствам функции распределения, зная непрерывную функцию распределения случайной величины $F(x)$, можно определить вероятность попадания случайной величины X в некоторый интервал $(x, x+\Delta x)$ (рис. 4.6).

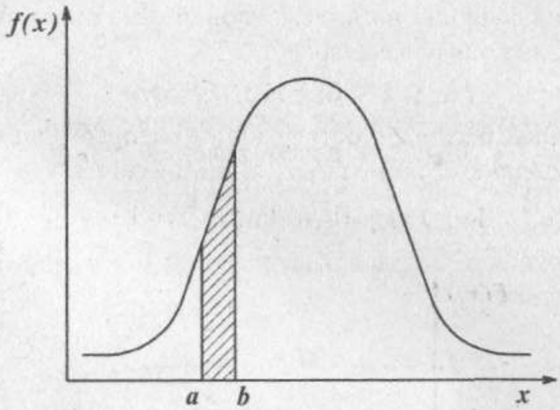


Рис. 4.7. *Плотность распределения непрерывной величины*

$$P(x < X < x+\Delta x) = F(x+\Delta x) - F(x). \qquad (4.11)$$

Разделим левую и правую части этого выражения на Δx и найдем предел при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} =$$

$$= F'(x) = f(x).$$

Функцию $f(x)$ называют *дифференциальной функцией распределения* или *плотностью распределения (плотностью вероятности)* непрерывной случайной величины X.

Плотность распределения непрерывной случайной величины есть предел отношения вероятности $P(\Delta x)$ попадания случайной величины X в интервал Δx к величине этого интервала.

Геометрический смысл плотности распределения вероятностей $f(x)$ заключается в следующем (рис. 4.7), зная $f(x)$ можно вычислить вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее заданному интервалу (a, b):

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (4.12)$$

Основные свойства дифференциальной функции распределения

1. Для любых x дифференциальная функция распределения неотрицательна, т.е. $f(x) \geq 0$.

2. Для дифференциальной функции распределения имеет место равенство:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

3. Для дифференциальной функции распределения имеет место равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Это свойство называется условием нормировки плотности вероятностей.

4. Для интегральной и дифференциальной функций распределения имеет место равенство:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

◆ **Пример 4.16**

Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<1,\\ \dfrac{(x-1)}{2} & \text{при } 1\le x\le 3,\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Вычислить вероятности попадания случайной величины X в интервалы (1; 2) и (3; 4).

Решение:

$$P_1=F(2)-F(1)=\frac{2-1}{2}-\frac{1-1}{2}=0{,}5,$$

$$P_2=F(4)-F(3)=1-\frac{3-1}{2}=1-1=0.$$

◆ **Пример 4.17**

Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<2,\\ (x-2)^2 & \text{при } 2\le x\le 3,\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины.

Решение:

Согласно определению плотности распределения как первой производной функции распределения, имеем:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x>2,\\ 2(x-2) & \text{при } 2\le x\le 3,\\ 0 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

4.2.2. Числовые характеристики случайных величин

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Но при решении ряда практических задач нет необходимости знать все возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности, а удобнее пользоваться некоторыми количественными показателями, которые в сжатой форме дают достаточную информацию о случайной величине. Такие показатели называются *числовыми характеристиками случайной величины.* Основными из них являются: *математическое ожидание*, *дисперсия* и *среднее квадратическое отклонение.*

Математическое ожидание *характеризует* положение случайной величины на числовой оси, определяя некоторое среднее значение, около которого сосредоточены все возможные значения случайной величины.

Математическое ожидание дискретной случайной величины *равно* сумме произведений всех возможных ее значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad (4.13)$$

Для непрерывных случайных величин с плотностью распределения $f(x)$ математическое ожидание равно определенному интегралу:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx, \qquad (4.14)$$

где a и b — пределы интегрирования, соответствующие крайним границам возможных значений X.

В общем случае $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$. (4.15)

Формула (4.14) получается из формулы (4.13), если в ней заменить отдельные значения x_i на непрерывно изменяющейся параметр x, соответствующие вероятности p_i — на элемент вероятности $f(x)dx$, конечную сумму — на интеграл.

Математическое ожидание является центром распределения вероятностей случайной величины X. На рисунке 4.8 приведены графики распределения случайной величины, описанные одинаковым законом, но имеющие различные значения математического ожидания.

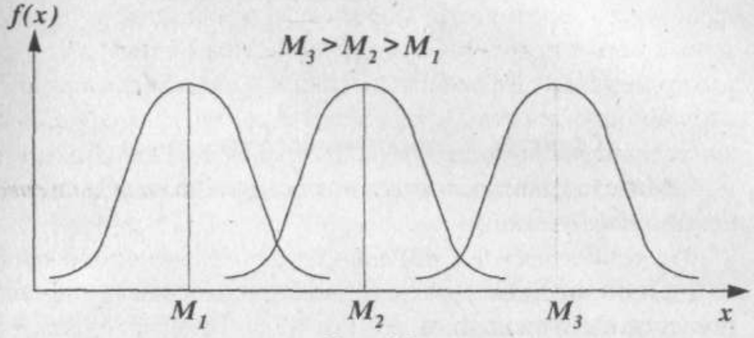


Рис. 4.8

◆ Пример 4.18

Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, зная закон ее распределения.

X	–1	0	1	2	3
p	0,05	0,2	0,4	0,3	0,05

Решение:

По формуле (4.13) находим:

$$M(X) = -1 \cdot 0{,}05 + 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}05 = 1{,}1.$$

◆ Пример 4.19

Найти математическое ожидание непрерывной случайной величины X, зная закон ее распределения.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x & \text{при } 0 \le x < 1, \\ -x + 2 & \text{при } 1 \le x < 2, \\ 0 & \text{при } x \ge 2. \end{cases}$$

Решение:

По формуле 4.14 находим:

$$M(x) = \int_0^2 xf(x)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x)dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + x^2\Big|_1^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = 1.$$

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной:

$$M(C) = C.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

$$M(CX) = CM(X).$$

3. Математическое ожидание алгебраической суммы случайных величин равно алгебраической сумме их математических ожиданий:

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

Две случайные величины X и Y называются независимыми, если распределение одной из них не зависит от того, какое значение приняла другая величина.

4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

5. Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания всегда равно нулю:

$$M(X - M(X)) = 0.$$

Другой характеристикой центра распределения является срединная точка, или медиана. *Медина* равна такому значению случайной величины, которое делит пополам площадь под кривой плотности распределения (рис. 4.9).

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = 0{,}5 \text{ или } P(X > Me) = P(X < Me).$$

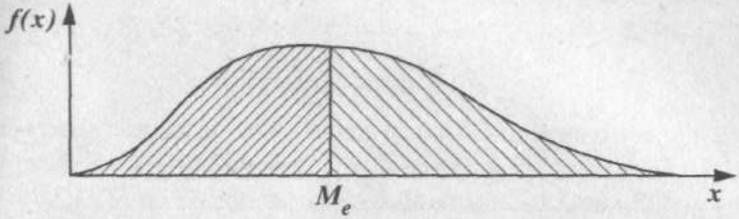


Рис. 4.9. Определение медианы случайной величины

Медиана менее чувствительна, чем математическое ожидание к небольшому числу крайних значений.

Часто применяется еще одна характеристика положения — *мода* случайной величины.

Мода — это значение случайной величины, имеющее наибольшую вероятность (рис. 4.10). Однако это определение подходит только для одномодальных распределений. В общем случае мода — это такое значение случайной величины, что предшествующие и последующие за ними значения имеют меньшие вероятности. Например, на рис. 4.10 показано бимодальное распределение.

В случае симметричного одномодального распределения математическое ожидание совпадает с модой и медианой.

Дисперсия характеризует рассеяние (отклонение) случайной величины относительно математического ожидания.

Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания $M(X)$ называют дисперсией случайной величины X и обозначают $D(X)$, т.е.

$$D(X) = M[X - M(X)]^2. \qquad (4.16)$$

Для дискретных случайных величин эту формулу можно записать в следующем виде:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n}[x_i - M(X)]^2 p_i. \qquad (4.17)$$

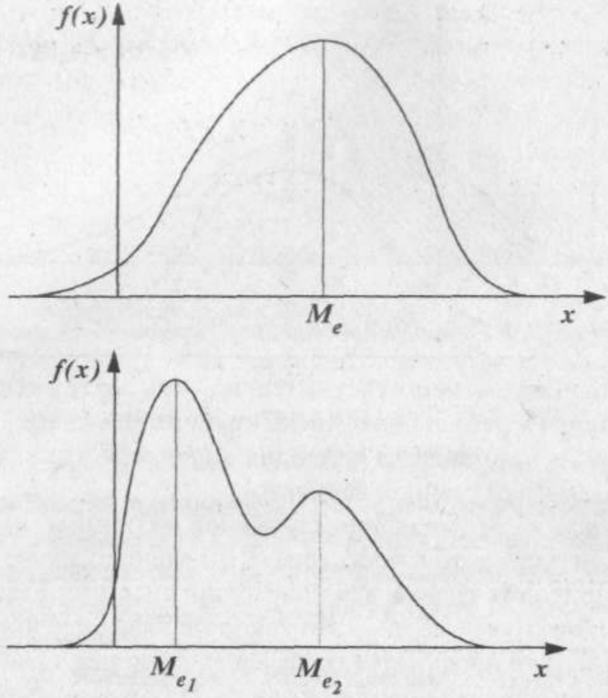


Рис 4.10. Одномодальное и бимодальное распределение случайной величины

Для непрерывных случайных величин с плотностью вероятности $f(x)$:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x-M(X)\right]^2 f(x)dx. \qquad (4.18)$$

На рисунке 4.11 приведены графики плотности распределения случайных величин с одинаковыми значениями математического ожидания, но различными дисперсиями. Следует отметить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)dx=1.$$

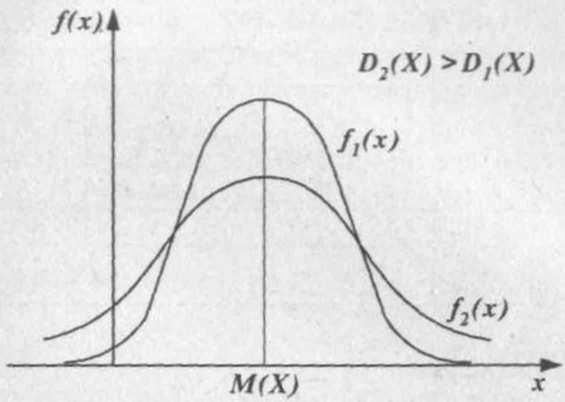


Рис. 4.11. Графики плотности распределения случайных величин $f_1(x)$ и $f_2(x)$

Размерность дисперсии равна квадрату случайной величины и ее неудобно использовать для характеристики разброса, поэтому удобнее применять корень квадратный из дисперсии — *среднее квадратическое отклонение*. Эта величина дает представление о размахе колебаний случайной величины около математического ожидания.

$$\sigma(\textit{сигма}) = \sqrt{D(X)}. \qquad (4.19)$$

◆ Пример 4.20

Случайная величина задана следующим рядом распределения.

X	–1	0	1	2
p	0,1	0,3	0,4	0,2

Найти математическое ожидание и дисперсию этой величины.

Решение:

Для нахождения математического ожидания воспользуемся формулой (4.13), а для дисперсии — (4.17). Результаты вычисления сведем таблицу 4.3

Таблица 4.3

x	p_i	x_ip_i	$x_i - M(X)$	$[x_i - M(X)]^2$	$[x_i - M(X)]^2p_i$
–1	0,1	–0,1	–1,7	2,89	0,289
0	0,3	0	–0,7	0,49	0,147
1	0,4	0,4	0,3	0,09	0,036
2	0,2	0,4	1,3	1,69	0,338
$\sum$	1	0,7			0,81

Из таблицы следует, что $M(X) = 0{,}7$; $D(X) = 0{,}81$.

◆ Пример 4.21

Случайная величина задана плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 2x \text{ при } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение:

Математическое ожидание найдем по формуле (4.14).

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^1 2x^2 dx = \left.\frac{2x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Далее по формуле (4.18) получаем:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 f(x)dx = \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 2xdx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{4}{9}\right) 2xdx = \int_0^1 \left(2x^3 - \frac{8x^2}{3} + \frac{8x}{9}\right) dx =$$

$$= 2\left.\left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{9} + \frac{2x^2}{9}\right)\right|_0^1 = \frac{1}{18}.$$

Основные свойства дисперсии

1. Дисперсия алгебраической суммы двух независимых случайных величин X и Y равна сумме дисперсий этих величин, т.е.

$$D(X \pm Y) = D(X) \pm D(Y).$$

2. Дисперсия постоянной величины C равна нулю, т.е. $D(C) = 0$.

3. Постоянный множитель C случайной величины X можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат, т.е.

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

4. Дисперсия случайной величины X равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания, т.е.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \tag{4.20}$$

Последняя формула более удобна для вычислений, чем формула (4.17).

4.2.3. Законы распределения непрерывных случайных величин

Распределение вероятностей носит название теоретического распределения случайной величины. Теоретические распределения получают исходя из некоторых предположений относительно простейших закономерностей данного явления. Знание теоретических законов распределения изучаемых случайных величин позволяет оценивать их параметры, определить допустимые отклонения от истинных значений, проверять гипотезы и т.д.

Рассмотрим наиболее распространенные законы распределения непрерывных случайных величин.

4.2.3.1. Равномерное распределение

Равномерным называется распределение непрерывных случайных величин, все значения которых лежат на отрезке $[a, b]$ и имеют постоянную плотность вероятности на этом отрезке (рис. 4.12).

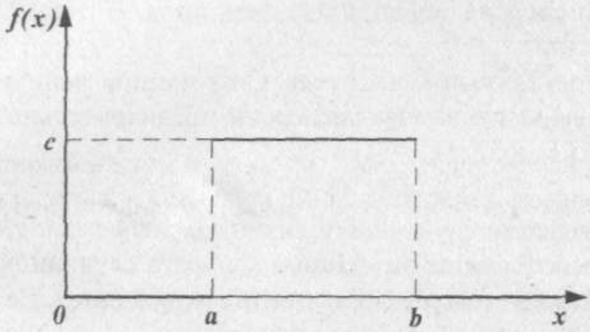


Рис. 4.12. График равномерного распределения

График равномерно распределенной случайной величины может быть описан следующей функцией:

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<a,\\ c \text{ при } a\le x\le b,\\ 0 \text{ при } x>b.\end{cases}$$

Учитывая, что площадь под кривой распределения равна 1, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_a^b cdx=cx\Big|_a^b=c(b-a)=1, \text{ отсюда } c=\frac{1}{b-a}.$$

Тогда плотность вероятности случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$, имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<a,\\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a\le x\le b,\\ 0 & \text{при } x>b.\end{cases}$$

Математическое ожидание равномерного распределения равно:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2-a^2}{b-a}=\frac{b+a}{2}.$$

◆ Пример 4.22

Вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение для случайной величины с равномерным распределением.

Решение:

Используем формулу (4.20), согласно которой $D(X)=$ $=M(X^2)-[M(X)]^2$.

$$M(X^2)=\int_a^b x^2 f(x)dx=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}dx=\frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b=$$

$$=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

Тогда $D(X)=\dfrac{b^2+ab+a^2}{3}-\dfrac{(a+b)^2}{4}=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

$$\sigma=\sqrt{D(X)}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

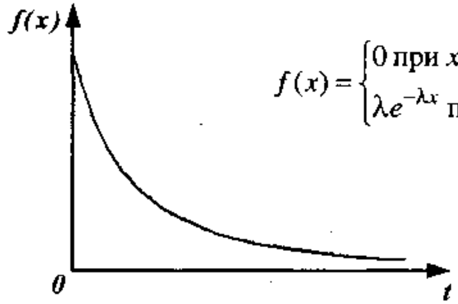
Вероятность попадания случайной величины, имеющей равномерное распределение, на интервал (α,β), лежащий на отрезке $[a,b]$, равна:

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta\frac{dx}{b-a}=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Равномерное распределение часто используется для генерирования случайных чисел.

4.2.3.2. Экспоненциальное распределение

Случайная величина называется распределенной по *экспоненциальному закону*, если ее плотность распределения имеет вид (рис. 4.13):



$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$$

***Рис. 4.13.** Экспоненциальное распределение*

Определим математическое ожидание показательного закона распределения:

$$M(X) = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \left(-xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right)\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Дисперсия:

$$D(X) = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - [M(X)]^2 =$$

$$\left(-x^2 e^{-\lambda x} - \frac{2x}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{2}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \right)\Bigg|_0^{\infty} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{\lambda}; \text{ т.е. } M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Экспоненциальным законом описываются случайные величины, выражающие время безотказной работы устройств или их отдельных элементов.

Вероятность попадания случайной величины X в интервал (α, β) определяется по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_{\alpha}^{\beta} = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

◆ Пример 4.23

Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 4e^{-4x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что результаты испытания X попадут в интервал (0,2; 0,5).

Решение:

По формуле $P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$ имеем:

$$P(0{,}2 < X < 0{,}5) = e^{-4 \cdot 0{,}2} - e^{-4 \cdot 0{,}5} = 0{,}4493 - 0{,}1353 = 0{,}314.$$

4.2.3.3. Нормальный закон распределения

Одним из наиболее важных и часто используемых распределений непрерывных случайных величин является *нормальное распределение (закон Гаусса)*.

Теоретическим обоснованием частого использования нормального распределения является одна из *центральных предельных теорем*. Согласно этой теореме распределение среднего n независимых случайных величин, распределенных по любому закону или даже имеющих n различных распределений с конечным математическим ожиданием и дисперсией, при увеличении числа наблюдений в выборке приближается к нормальному. Таким образом, если случайная величина подвержена достаточно большому числу независимых «небольших» воздействий, то можно ожидать, что эта случайная величина будет иметь распределение, близкое к нормальному. Этим объясняется широкое использование нормального закона распределения в теории вероятностей.

Однако в тех случаях, когда имеет место воздействие одного фактора и значительное его превышение над другими более мелкими факторами, нельзя использовать нормальный закон распределения. Необходимо соответствующее теоретическое обоснование выбора закона распределения или экспериментальная проверка соответствия тому или иному закону распределения.

Непрерывная случайная величина X имеет *нормальное распределение вероятностей* с параметрами a и σ, если ее плотность распределения задается формулой:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a — математическое ожидание случайной величины; σ^2 — дисперсия случайной величины; σ — среднее квадратическое отклонение. Кривая нормального закона распределения имеет колоколообразную форму, симметричную относительно математического ожидания (рис. 4.14).

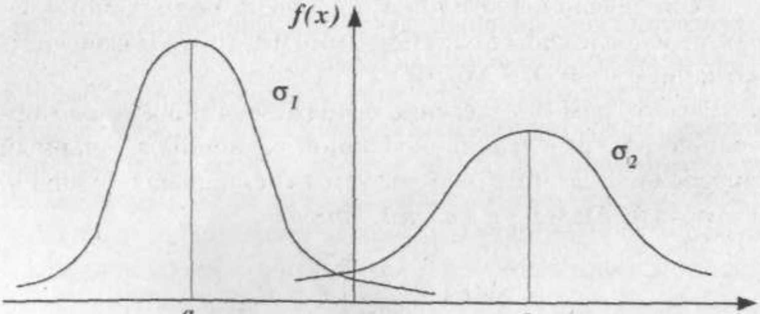


Рис. 4.14. *Графики плотностей нормального распределения с разными a и σ*

Основные свойства графика нормального распределения

1. Областью распределения функции $f(x)$ является вся числовая ось.

2. Функция $f(x)$ может принимать только положительные значения, т.е. $f(x)>0$.

3. Предел функции $f(x)$ при неограниченном возрастании $|x|$ равен нулю, т.е. ось $0x$ является горизонтальной асимптотой графика функции.

4. Функция $f(x)$ имеет в точке $x = a$ максимум, равный $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

5. График функции $f(x)$ симметричен относительно прямой $x = a$.

6. Кривая нормального распределения в точках $x = a \pm \sigma$ имеет перегиб.

Параметр a характеризует положение графика на числовой оси (параметр положения), а σ характеризует степень сжатия или растяжения графика относительно оси a (параметр сжатия). Площадь под кривой во всех случаях должна быть одинаковой и равной 1 (условие нормировки).

Если случайная величина подчинена нормальному закону распределения с параметрами a и σ, то это можно кратко записать как $X \sim N(a, \sigma)$.

Рассмотрим определение вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал. Для этого используется специальная функция, которая называется *функцией Лапласа.*

$$\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Значения этой функции приведены в Приложении 2 (табл. 1).

Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

$$\Phi(0) = 0;\ \Phi(\infty) = 1;\ \Phi(-u) = -\Phi(u).$$

Для использования табулированных функций Лапласа необходимо перейти к стандартной случайной величине

$u = \dfrac{x-a}{\sigma}$. Тогда вероятность попадания случайной величины в интервал (α, β) можно записать:

$$P(\alpha < x < \beta) = P\left(\frac{\alpha - a}{\sigma} < \frac{x-a}{\sigma} < \frac{\beta - a}{\sigma}\right).$$

Отсюда следует

$$P(\alpha < x < \beta) = F(u_2) - F(u_1),$$

где $F(u)$ — интегральная функция распределения, которая связана с функцией Лапласа следующим соотношением:

$$F(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(u).$$

Тогда $P(\alpha < X < \beta) = \dfrac{1}{2}\Phi(u_2) - \dfrac{1}{2}\Phi(u_1)$.

◆ Пример 4.24

Найти вероятности попадания случайной величины X в интервалы ($-\sigma$, σ); (-2σ, 2σ); (-3σ, 3σ) (рис. 4.15).

Решение:

1. $P(a-\sigma < X < a+\sigma) = \dfrac{1}{2}\Phi\left(\dfrac{a+\sigma-a}{\sigma}\right) - \dfrac{1}{2}\Phi\left(\dfrac{a-\sigma-a}{\sigma}\right) =$

$= \dfrac{1}{2}\Phi(1) - \dfrac{1}{2}\Phi(-1) = \dfrac{1}{2}[\Phi(1) + \Phi(1)] = \Phi(1).$

По таблице № 1 (Приложение 2) находим $\Phi(1) = 0{,}6827$, тогда $P(a-\sigma < X < a+\sigma) = 0{,}6827$.

2. $P(a-2\sigma < X < a+2\sigma) = \dfrac{1}{2}\left[\Phi\left(\dfrac{a+2\sigma-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{a-2\sigma-a}{\sigma}\right)\right] =$

$= \dfrac{1}{2}\Phi(2) - \dfrac{1}{2}\Phi(-2) = \Phi(2) = 0{,}9545.$

3. $P(a-3\sigma < X < a+3\sigma) = \dfrac{1}{2}\left[\Phi\left(\dfrac{a+3\sigma-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{a-3\sigma-a}{\sigma}\right)\right] =$

$= \dfrac{1}{2}\Phi(3) - \dfrac{1}{2}\Phi(-3) = \Phi(3) = 0{,}9973.$

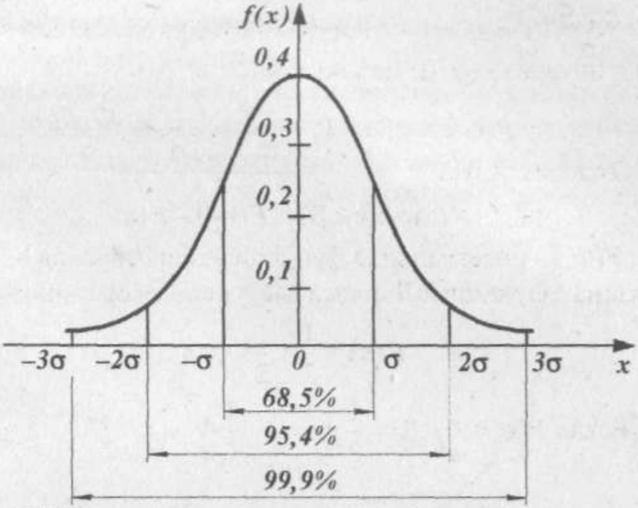


Рис. 4.15. Распределение площадей под кривой плотности стандартного нормального распределения

Полученные данные показывают, что на расстоянии σ по обе стороны от математического ожидания находится 68,5% возможных значений случайной величины, в диапазон $\pm 2\sigma$ попадает 95,4%, а в диапазоне $\pm 3\sigma$ (трех сигм) находится 99,86%, т.е. практически все возможные значения случайной величины X.

Отсюда вытекает правило «трех сигм»: *Если случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами a и σ^2, то ее значения практически не выходят за интервал* $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$.

4.2.3.4. Распределение χ^2 (хи-квадрат)

Распределением χ^2 с k степенями свободы называется распределение суммы квадратов k независимых случайных величин, распределенных по стандартному нормальному закону, т.е.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2,$$

где Z_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) имеет нормальное распределение $N(0; 1)$.

Кривые χ^2 — распределение для различных значений числа степеней свободы k приведены на рисунке 4.16. Видно, что с увеличением k распределение медленно приближается к нормальному.

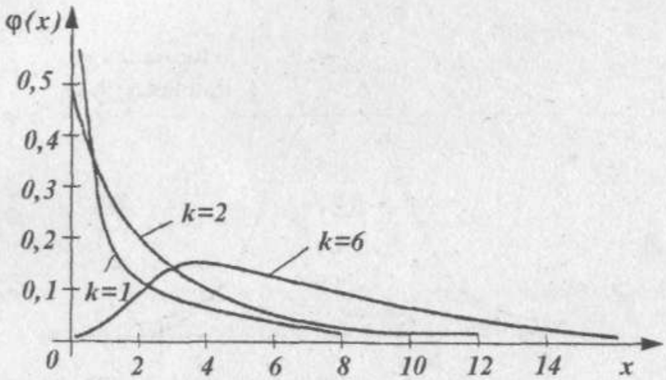


Рис. 4.16. Распределение χ^2

В приложении 2 (табл. 3) приведены числовые значения распределения χ^2 при некоторых k.

4.2.3.5. Распределение Стьюдента (t-распределение)

Распределением Стьюдента (или t-распределением) называется распределение случайной величины

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2/k}},$$

где Z — случайная величина, распределенная по стандартному нормальному закону, т.е. $N(0; 1)$; χ^2 — независимая от Z случайная величина, имеющая χ^2-распределение с k степенями свободы.

Графики кривых распределения Стьюдента и нормального распределения приведены на рисунке 4.17. При $k \to \infty$ кривая t-распределения *приближается к нормальному*. Как видно из рис. 4.17, кривая t-распределения симметрична относительно оси ординат, следовательно, $M(t) = 0$. В Приложении 2 приведены табличные данные распределения Стьюдента.

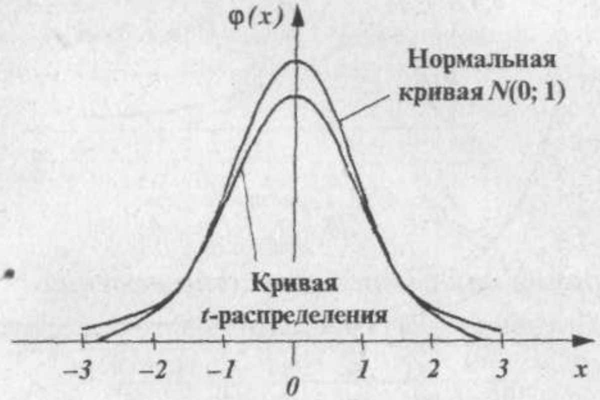


Рис. 4.17. t-распределение

4.2.3.6. Распределение Фишера–Снедекора (*F*-распределение)

Распределением Фишера–Снедекора (F-распределением) называется распределение случайной величины

$$F = \frac{\chi^2(l)/l}{\chi^2(k)/k},$$

где $\chi^2(l)$ и $\chi^2(k)$ — случайные величины, имеющие χ^2-распределение соответственно с l и k степенями свободы.

На рисунке 4.18 приведены кривые F-распределения при некоторых значениях числа степеней свободы l и k. В Приложении 2 приведена таблица распределения Фишера–Снедекора.

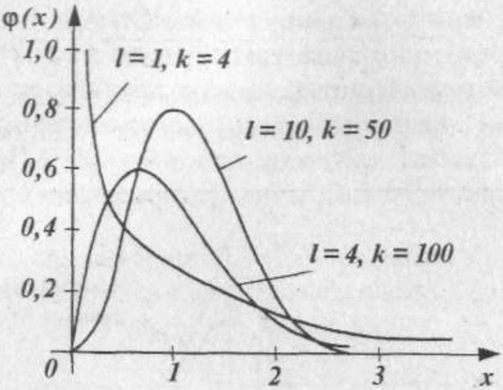


Рис. 4.18. F-распределение

Задания для самостоятельно решения

41. Случайная величина X задана законом распределения:

X_i	2	3	10
p_i	0,1	0,4	0,5

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить многоугольник распределения.

42. Найти дисперсию случайной величины X, зная закон ее распределения. Построить многоугольник распределения.

X_i	0,1	2	10	20
p_i	0,4	0,2	0,15	0,25

43. Найти дисперсию случайной величины X, зная закон ее распределения. Построить функцию распределения $F(X)$.

X_i	–1	1	2	3
p_i	0,48	0,01	0,09	0,42

44. Найти среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины X, зная закон ее распределения. Построить функцию распределения $F(X)$.

X_i	–1	1	2	3
p_i	0,19	0,51	0,25	0,05

45. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, зная закон ее распределения.

X_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

46. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана законом распределения. Найти функцию распределения.

X_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

47. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X_i	0,2	0,4	0,6	0,8	1
P_i	0,1	0,2	0,4	P_4	0,1

Чему равна вероятность $P_4(X = 0{,}8)$? Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию.

48. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X_i	3	4	5	6	7
p_i	P_1	0,15	P_3	0,25	0,35

Найти вероятность $P_1(x = 3)$ и $P_3(x = 5)$, если известно, что P_3 в 4 раза больше P_1. Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию.

49. Функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \dfrac{x^2}{1+x^2} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Найти ее плотность распределения.

50. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность распределения вероятностей и математическое ожидание.

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<1,\\ \dfrac{(x^2-x)}{2} & \text{при } 1\le x\le 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

51. Функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ x^2 & \text{при } 0\le x\le 1,\\ 1 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Найти ее плотность распределения, математическое ожидание и дисперсию.

52. Случайная величина X подчиняется закону распределения с плотностью $f(x)$, равной:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ a(3x-x^2) & \text{при } 0\le x\le 3,\\ 0 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Найти коэффициент a и определить вероятность попадания X в промежуток (1, 2).

53. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$\mathrm{F}(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<2,\\ (x-2)^2 & \text{при } 2\le x\le 3,\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервал (2,5; 3,5).

54. Дана функция плотности распределения случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ a\sin x & \text{при } 0\le x\le \pi;\\ 0 & \text{при } x>\pi.\end{cases}$$

Найти коэффициент a и функцию распределения вероятности $F(X)$.

55. Случайная величина X задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ a(4x-x^3) & \text{при } 0\le x\le 2,\\ 0 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Найти коэффициент a и математическое ожидание.

56. Дан ряд распределения дискретной случайной величины:

X_i	5	10	15	20	25	30
p_i	0,05	0,2	0,35	0,25	0,1	0,05

Найти моду.

57. Случайная величина имеет равномерное распределение на отрезке [3, 8]. Найти вероятность попадания случайной величины в промежуток (4, 6).

58. Для какого значения a функция

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ ae^{-\lambda x} & \text{при } x\ge 0,\end{cases}$$

является плотностью распределения показательного закона?

59. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $a=40$ и дисперсией $D(x)=200$. Найти вероятность попадания случайной величины в интервал (30, 80).

60. Математическое ожидание количества болельщиков, посещающих спортивные мероприятия, равно 950 со средним квадратическим отклонением 150. Считая, что данная случайная величина подчиняется нормальному закону распределения, найти вероятности:

a) болельщиков окажется больше 1 250 человек;

b) меньше, чем 850 человек;

c) будет находиться между 800 и 1 300 человек.

4.3. Основы математической статистики

4.3.1. Задачи математической статистики

Математическая статистика — это раздел математики, изучающий методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений с целью выявления существующих закономерностей.

Согласно определению в центре внимания математической статистики, как и теории вероятностей, находятся массовые явления. Однако если в теории вероятностей рассматриваемые законы распределения случайных величин и их характеристики были заранее известны, то при решении задач математической статистики положение совершенно иное. Единственный способ получения информации о случайной величине — это проведение экспериментов. И все характеристики должны быть получены по экспериментальным данным.

При этом надо иметь в виду, что всякий эксперимент связан с ошибками наблюдений и измерений, поэтому характеристики получаются приближенными. Кроме того, при проведении опытов всегда приходится иметь дело с ограниченным количеством экспериментальных данных, что также сказывается на точности полученных выводов. Поэтому одна из основных задач математической статистики состоит в том, чтобы по экспериментальным данным сделать выводы о параметрах распределения, например определить их приближенные значения (оценки) и указать ошибку их определения. Кроме того, важным разделом является статистическая проверка предположений (гипотез) о законах распределения случайных величин, равенстве математических ожиданий, дисперсии и т.п. Таким образом, основные задачи математической статистики заключаются в следующем:

1) статистическое оценивание параметров законов распределения;
2) статистическая проверка гипотез.

4.3.2. Генеральная совокупность и выборка

Обычно исследования проводятся не на единичных, а на групповых объектах, объединенных по какому-либо признаку. Совокупность таких относительно однородных, но индивидуально различных единиц наблюдения, объединяемых по некоторым качественным или количественным признакам, характеризующим эти объекты, называется *совокупностью*.

Чтобы получить исчерпывающую информацию о состоянии той или иной статистической совокупности, нужно учесть весь ее состав без исключения. Однако не всегда приходится прибегать к сплошному обследованию изучаемых совокупностей. Поэтому часто анализу подвергается какая-то часть, по которой и судят о состоянии всей совокупности в целом.

Совокупность всех мыслимых наблюдений или мысленно возможных объектов исследования называется генеральной.

Генеральная совокупность есть понятие условно математическое или абстрактное, а на практике обычно используется часть членов генеральной совокупности, которая носит название *выборки*, или *выборочной совокупности*.

Например, чтобы дать ответ об эффективности некоторого препарата для лечения гриппа, необходимо его проверить в отношении всех больных, страдающих этим заболеванием на земном шаре. Такая группа больных относится к генеральной совокупности. На практике клиническая апробация препаратов проводится на ограниченном контингенте больных (выборочной совокупности).

Сущность выборочного метода заключается в том, чтобы по свойствам части (выборки) судить о численных характеристиках целого (генеральной совокупности).

Ввиду неполного отображения выборкой статистических характеристик генеральной совокупности необходимо: во-первых, организовать получение выборки так, чтобы она наиболее полно характеризовала свойства и особенности генеральной совокупности (*репрезентативность* выборки); во-вторых, в каждом конкретном случае устанавливать, с какой уверенностью можно перенести результаты выборочного наблюдения на всю генеральную совокупность.

Для выполнения первого условия необходимо, чтобы выборка была *типичной* и *объективной*, что достигается использованием принципа случайного отбора объектов исследования из генеральной совокупности.

Выделяют два метода проведения исследования: повторный и бесповторный. В первом случае все объекты после проведения наблюдений над ними возвращаются обратно в генеральную совокупность. При бесповторном отборе выбранный объект обратно в генеральную совокупность не возвращается.

4.3.3. Статистическое распределение (вариационный ряд). Гистограмма. Полигон

В ходе экспериментов исследователь получает набор числовых данных, отражающих результаты измерений или наблюдений исследуемых объектов. Совокупность этих числовых данных, представленных в виде последовательности результатов наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, есть выборка из генеральной совокупности. Основная задача первичного статистического анализа состоит в том, чтобы по имеющимся экспериментальным данным охарактеризовать исследуемую генеральную совокупность небольшим числом параметров.

Если полученные данные расположить в порядке убывания или возрастания числовых значений исследуемого признака, то такой ряд чисел будет называться *вариационным рядом.*

В том случае, когда среди числовых данных есть одинаковые значения, их можно представить в виде таблицы. В первой строке таблицы указываются значения признака (варианты), а во второй — абсолютные или относительные частоты их встречаемости. Такое представление вариационного ряда еще называют *статистическим распределением.*

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

◆ Пример 4.25

Ежедневное количество студентов, посещающих методический кабинет на протяжении ряда дней, следующее: 15, 17, 16, 18, 20, 21, 18, 17, 20, 15, 18, 17, 16, 19, 17, 16, 18, 19, 18, 19.

Составить статистическое распределение выборки.

Решение:

В первой строке таблицы укажем встречающиеся значения посещений, во второй — количество таких значений и, наконец, в третьей — относительную частоту этих значений.

Значения признака x_i	15	16	17	18	19	20	21
Частота встречаемости m_i	2	3	4	5	3	2	1
Относительная частота $f_i = m_i/n$	0,1	0,15	0,2	0,25	0,15	0,1	0,05

Для графического изображения статистического распределения строят полигоны или гистограммы. Гистограммой называется график, по оси абсцисс которого отложены границы классов, а по оси ординат — их частота (рис. 4.19).

Для построения гистограммы весь диапазон измеряемой величины (от минимального до максимального) разбивается на равные интервалы, называемые *классами*. Ширину интервала можно определить по формуле Стерджеса:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}32 \lg n},$$

где h — ширина интервала; $x_{\max}$ — максимальное и $x_{\min}$ — минимальное значения выборочной величины; n — количество выборочных данных.

Зная ширину интервала, определяют количество интервалов. Однако эта формула носит эмпирический характер и на практике количество интервалов выбирают в пределах 7–12. После выбора количества *интервалов устанавливают* границы классов (C_i) и срединные значения классов ($\overline{C}_i$), где $\overline{C}_i = \frac{C_i + C_{i+1}}{2}$ — середина i-го класса; $i = 1, 2, \ldots$; k — количество классов. Затем определяют m_i — количество значений выборочных данных, которые попадают в тот или иной класс. После просмотра всех выборочных данных по значениям m_i строят гистограмму. По этой гистограмме можно построить нормированную гистограмму, в которой *каждое значение* m_i заменяется на $f_i = \frac{m_i}{n}$.

Получение нормированных гистограмм позволяет сравнивать гистограммы, построенные на одних и тех же границах классов, но имеющих различный объем выборки.

◆ Пример 4.26

Построить гистограмму для примера 4.25.

Решение:

Интервал	14,5–15,5	15,5–16,5	16,5–17,5	17,5–18,5	18,5–19,5	19,5–20,5	20,5–21,5
m_i	2	3	4	5	3	2	1
f_i	0,1	0,15	0,2	0,25	0,15	0,1	0,05

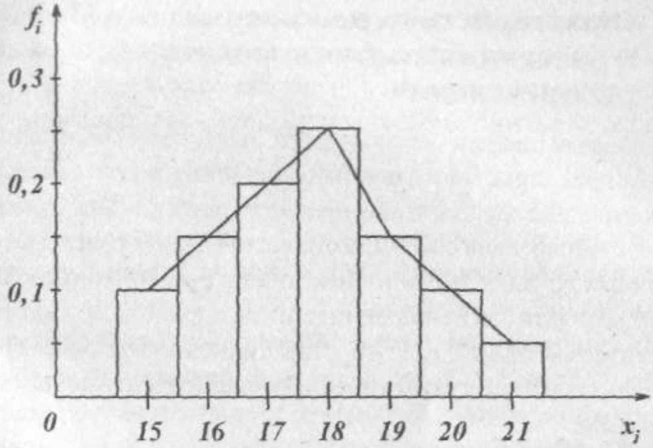


Рис. 4.19

Полигон частот можно получить из гистограммы путем соединения срединных значений классов (рис. 4.19). График полигона частот (или относительных частот) легко построить и по статистическому распределению. На оси абсцисс, из точек x_i, проводятся перпендикуляры высотой m_i/n и соединяются ломаной прямой.

При неограниченном увеличении числа наблюдений и увеличении количества классов ширина прямоугольников гистограммы будет уменьшаться и середины верхних концов верхних концов прямоугольников сольются в одну сплошную плавную линию, которая в пределе станет графиком плотности вероятности, характеризующим распределение генеральной совокупности.

Построение полигонов и гистограмм позволяет произвести первичный анализ экспериментальных данных, а именно: по форме гистограммы сделать предположение о законе распределения случайной величины; выявить наиболее часто встречающиеся значения исследуемой величины и разброс или отклонение относительно этого значения.

4.4. Характеристики положения и рассеяния статистического распределения

В разделе теории вероятностей были рассмотрены числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение. Аналогичные числовые характеристики вводятся и для выборочных данных. Выборочные аналоги можно определить как из результатов наблюдения, представленных в виде последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$, так и предварительно сгруппированых в виде статистического распределения или гистограммы.

Аналогом основной характеристики положения математического ожидания случайной величины является выборочное среднее:

$$\overline{x}_b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \qquad (4.21)$$

Если данные представлены в виде гистограммы, то

$$\overline{x}_b = \sum_{i=1}^{k} f_i \overline{C}_i, \qquad (4.22)$$

где $\overline{C}_i$ — срединное значение i-го интервала; f_i — относительная частота попадания в данный интервал; k — количество интервалов.

Кроме математического ожидания, параметрами, характеризующими центр статистического распределения, являются медиана и мода.

Медиана (Me) — структурная средняя, относительно которой вариационный ряд делится на две равные части: по обе стороны от Me располагается одинаковое число вариант.

Если n — нечетное число, то медиана равна значению $\frac{n+1}{2}$ — упорядоченного наблюдения, если же n — четное число, то медиана равна среднему значению вариант с номерами $(n/2)$ и $[(n/2) + 1]$.

◆ Пример 4.27

Дан вариационный ряд 5, 7, 8, 10, 12, 14, 18. Найти медиану.

Решение:

Медианой этого ряда будет центральная варианта, т.е. $Me = 10$, по обе стороны от нее находится по три варианты.

Если выборочные данные представлены в виде гистограммы, то медиана определяется следующим образом. Вначале находится класс, или интервал, в котором — медиана. Для этого необходимо сложить частоты интервалов от меньших к большим значениям классов до величины, превосходящей $n/2$. Тот класс, прибавления частот которого, превысит $n/2$, будет соответствовать медианному классу.

Далее определяем значение медианы по формуле:

$$Me = x_{Me} + h\left(\frac{\frac{n}{2} - \sum\limits_{i=1} m_i}{m_{Me}}\right), \tag{4.23}$$

где x_{Me} — нижняя граница интервала, в котором находится медиана; $\sum\limits_{i=1} m_i$ — накопленная частота домедианного интервала; h — ширина интервала; m_{Me} — частота медианного интервала; n — объем выборки.

◆ Пример 4.28

Найти медиану для примера 4.26.

Решение:

Занесем данные примера 4.26 в таблицу 4.4.

Таблица 4.4

Интервал X	m_i	$\sum_i m_i$	Интервал X	m_i	$\sum_i m_i$
14,5–15,5	2	2	18,5–19,5	3	17
15,5–16,5	3	5	19,5–20,5	2	19
16,5–17,5	4	9	20,5–21,5	1	20
17,5–18,5	5	14			

Согласно условию задачи $n = 20$, тогда $n/2 = 10$. Следовательно, частота медианного интервала $m_{Me} = 5$, а сам интервал 17,5–18,5. По формуле (4.23) получаем:

$$Me = 17{,}5 + 1 \cdot \left(\frac{10-9}{5}\right) = 17{,}7.$$

Мода (M_0) — это такое значение случайной величины, что предшествующие и следующее за ним значения имеют меньшие вероятности.

На гистограмме класс, имеющий наибольшую частоту, называется *модальным*. Значение моды определяется по следующей формуле:

$$M_0 = x_н + h\left(\frac{m_2 - m_1}{2m_2 - m_1 - m_3}\right), \qquad (4.24)$$

где $x_н$ — нижняя граница модального класса, т.е. класса с наибольшей частотой (m_2); m_1 — частота класса, предшествующего модальному; m_3 — частота класса, следующего за модальным; h — ширина интервала.

◆ Пример 4.29

Найти значение моды для примера 4.26.

Решение:

Из данных таблицы следует, что нижняя граница класса с наибольшей частотой ($m_2 = 5$) равна $x_н = 17{,}5$; частота предшествующего класса — $m_1 = 4$, а следующего за модальным классом — $m_3 = 3$; $h = 1$.

Тогда по формуле (4.24):

$$M_0 = 17{,}5 + 1 \cdot \left(\frac{5-4}{10-4-3} \right) = 17{,}83.$$

Для характеристики рассеяния вариант относительно своего выборочного среднего $\overline{x}_b$ вводят характеристику, называемую *выборочной дисперсией*, которая является аналогом дисперсии генеральной совокупности и равна:

$$S_b^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_b)^2. \qquad (4.25)$$

Квадратный корень из выборочной дисперсии называется *выборочным среднеквадратическим отклонением*:

$$S_b = \sqrt{S_b^2}\ . \qquad (4.26)$$

Если данные представлены в виде гистограммы, то

$$S_b^2 = \sum_{i=1}^{k} (\overline{C}_i - \overline{x}_b)^2 f_i, \qquad (4.27)$$

где $\overline{C}_i$ — срединное значение i-го интервала; f_i — относительная частота попадания в i-й интервал; k — количество интервалов.

Иногда, для сравнения вариабельности признаков, имеющих различную размерность, применяют безразмерный показатель, который называется коэффициентом вариации. Этот показатель представляет процентное отношение среднего квадратического отклонения к выборочной средней:

$$C = \frac{S}{\overline{x}_b} \cdot 100\%.$$

4.5. Оценка параметров генеральной совокупности по ее выборке

Характеристики нормального закона распределения $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$, для генеральной совокупности представляют собой постоянные величины или параметры. По отношению к ним соответствующие выборочные характеристики $\overline{x}_b$, S_b^2 и S_b являются *оценками* генеральных параметров, т. е. приближенными значениями параметров генеральной совокупности.

Оценкой параметра генеральной совокупности называют всякую однозначно определенную функцию результатов наблюдений, с помощью которой судят о значении параметра.

Оценки подразделяются на точечные и интервальные. Точечной называют оценку, которая определяется одним числом. Основными свойствами оценок являются свойства *несмещенности*, *эффективности* и *состоятельности.*

Точечную оценку θ^* параметра θ называют *несмещенной,* если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру θ, т.е. $M(\theta^*) = \theta$.

Требование несмещенности гарантирует отсутствие систематических ошибок при оценке параметров.

Так как оценка θ^* — случайная величина, значение которой изменяется от выборки к выборке, то величину ее отклонения от истинного значения параметров θ можно охарактеризовать дисперсией $D(\theta^*)$.

Несмещенную оценку θ^*, которая имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра θ, вычисленных по выборкам одного и того же объема, называют *эффективной оценкой.*

Оценку θ^* параметра θ называют *состоятельной*, если при увеличении числа независимых наблюдений ($n \to \infty$) с вероятностью, близкой к единице, можно утверждать, что разность между θ^* и θ по абсолютной величине меньше сколь угодно малого положительного числа ε, или

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1 .$$

Рассмотрим, какие выборочные характеристики лучше всего оценивают математическое ожидание и дисперсию.

Если из генеральной совокупности взять k независимых выборок одинакового объема, то вычисленные по этим данным выборочные средние $\overline{x}_{b1}; \overline{x}_{b2}; ... \overline{x}_{bk}$ будут распределены по нормальному закону, а их математическое ожидание равно математическому ожиданию генеральной совокупности:

$$M(\overline{x}_b) = M(X).$$

Таким образом, выборочное среднее $\overline{x}_b$ является несмещенной оценкой математического ожидания генеральной совокупности. При увеличении объема выборки ($n \to \infty$) значение выборочного среднего стремится к параметру генеральной совокупности с вероятностью, близкой к единице, т.е. данная оценка является состоятельной. Касаясь эффективности оценки, приведем без доказательства важный для практики вывод. Если случайная величина X распределена по нормальному закону, то несмещенная оценка математического ожидания имеет минимальную дисперсию, равную:

$$D(\overline{x}_b) = \frac{\sigma^2}{n}. \tag{4.27}$$

Таким образом, оценкой математического ожидания служит выборочная средняя:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{4.28}$$

где x_i — значение выборочных данных; n — объем выборки.

Если данные представлены в виде вариационного ряда, то:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i, \tag{4.29}$$

где x_i — варианта выборки; m_i — частота встречаемости варианты x_i; k — число классов.

Ранее, по аналогии с дисперсией генеральной совокупности, была введена выборочная дисперсия:

$$S_b^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_b)^2,$$

где n — объем выборки.

Можно показать, что для k независимых и равных выборок из генеральной совокупности, математическое ожидание их дисперсий отлично от дисперсии генеральной совокупности:

$$M(S_b^2) = \frac{n-1}{n} D(X),$$

т. е. данная оценка дисперсии является смещенной. Для получения несмещенной точечной оценки дисперсии генеральной совокупности необходимо использовать формулу:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2. \qquad (4.30)$$

Для вариационного ряда:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^2 m_i. \qquad (4.31)$$

Эту оценку называют *исправленной выборочной дисперсией*. Однако эта поправка существенна при малых значениях n, при $n > 50$ практически нет разницы между оценками S^2 и $S_b{}^2$. Можно показать, что оценки S^2 и $S_b{}^2$ являются состоятельными оценками $D(x)$.

Выборочной оценкой среднего квадратического отклонения будет:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_b)^2}.$$

С учетом полученной оценки генеральной дисперсии (4.27), выражение для дисперсии выборочной средней равно:

$$D(\overline{x}_b) = \frac{S^2}{n}.$$

Тогда оценка среднего квадратического отклонения выборочной средней или ошибка выборочной средней:

$$m_{\overline{x}_b} = \sqrt{\frac{S^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_b)^2}.$$

◆ Пример 4.30

Имеется выборка: 2, 4, 5, 3, 6, 4. Найти выборочное среднее, выборочную дисперсию и ошибку выборочного среднего.

Решение:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{2+4+5+3+6+4}{6} = 4,$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 =$$

$$= \frac{(2-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (3-4)^2 + (6-4)^2 + (4-4)^2}{6-1} = 2,$$

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{S^2}{n}} = \sqrt{\frac{2}{6}} = 0{,}58.$$

◆ Пример 4.31

Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	4	5	6	7
m_i	10	12	6	2

Найти оценки математического ожидания и дисперсии.

Решение:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i = \frac{4\cdot 10 + 5\cdot 12 + 6\cdot 6 + 7\cdot 2}{30} = 5,$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 m_i =$$

$$= \frac{(4-5)^2\cdot 10 + (5-5)^2\cdot 12 + (6-5)^2\cdot 2}{30-1} = \frac{24}{29} \approx 0{,}83.$$

12. Зак. 649

4.6. Интервальная оценка. Доверительный интервал и доверительная вероятность

В некоторых случаях представляет интерес не получение точечной оценки неизвестного параметра генеральной совокупности, а определение некоторого интервала, в котором может находиться этот параметр с заданной вероятностью. Интервальное оценивание более эффективно при малом числе наблюдений, когда точечная оценка мало надежна.

Доверительным интервалом (a, b) для параметра θ называют такой интервал, относительно которого можно с заранее выбранной вероятностью P, близкой к единице, утверждать, что он содержит неизвестное значение параметра θ.

Доверительный интервал, как бы «накрывает» содержащийся в нем неизвестный параметр и гарантирует, с какой вероятностью оцениваемый параметр будет находиться внутри этого интервала (рис. 4.20).

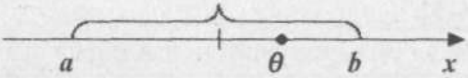


Рис. 4.20. *Доверительный интервал для математического ожидания*

Вероятность, с которой гарантируется попадание параметра генеральной совокупности внутрь доверительного интервала, называется *доверительной.* Чаще в качестве доверительных используется следующие уровни вероятности: $P_1 = 0{,}95$; $P_2 = 0{,}99$ и $P_3 = 0{,}999$. Это означает, что параметр генеральной совокупности попадет в указанный интервал в первом случае в 95 случаях из 100, во втором — в 99 случаях из 100 и в третьем случае — в 999 случаях из 1000.

В некоторых случаях указывается не доверительная вероятность, а вероятность обратных случаев, когда параметр не попадает в указанный интервал. Вероятность таких маловероятных случаев называется *уровнем значимости* α и равна:

$$\alpha = 1 - P.$$

Для нормального закона распределения, зная величину выборочной средней и ее ошибку, можно определить границы, в которых с той или иной вероятностью находится параметр генеральной совокупности — математическое ожидание. Эти границы называются доверительными и определяются по формуле:

$$\overline{x}_b - m_{\overline{x}} \cdot t_{\alpha,f} \le M(X) \le \overline{x}_b + m_{\overline{x}} \cdot t_{\alpha,f},$$

или

$$\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha,f} \le M(x) \le \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha,f},$$

где $t_{\alpha,f}$ — величина нормированного отклонения, определяемая по таблицам распределения Стьюдента (табл. 2). Величина $t_{\alpha,f}$ определяется вероятностью попадания генерального параметра в указанный интервал и числом степеней свободы $f = n - 1$, где n — объем выборки.

Так, при $n = 30$, $f = 30 - 1 = 29$ для $P = 0{,}95$, $t_{0.05,29} = 2{,}045$; для $P = 0{,}99$, $t_{0.01,29} = 2{,}756$; для $P = 0{,}999$ $t_{0.01,29} = 3{,}659$.

Из приведенных данных видно, что с увеличением доверительной вероятности границы интервала раздвигаются, т.е. увеличивается надежность попадания параметра в указанный интервал, но уменьшается точность его определения. И, наоборот, чем меньше вероятность, тем точнее оценка, но увеличивается возможность промаха. С увеличением объема выборки n длина интервала уменьшается. Поэтому для сохранения высокой доверительной вероятности и повышения точности доверительной оценки необходимо увеличить объем выборки.

Обычно при определении доверительного интервала исходят из заданной величины. Если задан объем выборки, то подбирают соответствующую доверительную вероятность, и, наоборот, если задана доверительная вероятность, то определяют необходимый объем выборки.

◆ Пример 4.32

Для данных примера 4.30 найти доверительные интервалы математического ожидания с надежностью 0,95.

Решение:

$$\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha,f} \le M(x) \le \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha,f}.$$

Из решеиия примера 4.30, имеем:

$$\bar{x} = 2\,;\ m_{\bar{x}} = 0{,}45\,;\ f = n - 1 = 6 - 1 = 5.$$

В Приложении 2 (табл. 2) найдем $t_{0.05,5} = 2{,}571$.

Тогда $2 - 0{,}45 \cdot 2{,}571 \le M(x) \le 2 + 0{,}45 \cdot 2{,}571$;

$$0{,}83 \le M(x) \le 3{,}157.$$

Доверительный интервал для дисперсии нормально распределенной генеральной совокупности определяется следующим выражением:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2} \le D(X) \le \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}, \qquad (4.32)$$

где S^2 — выборочная дисперсия; n — объем выборки; χ_1 и χ_2 — величины, определяемые по таблице 3 (Прил. 2).

Распределение χ^2 зависит от числа степеней свободы $f = n - 1$ и доверительной вероятности P.

Обычно χ_1^2 и χ_2^2 выбирают таким образом, чтобы вероятности событий $\chi^2 < \chi_1^2$ и $\chi^2 < \chi_2^2$ были одинаковы, т.е.

$$P(\chi^2 < \chi_1^2) = P(\chi^2 < \chi_2^2) = \frac{1-P}{2}.$$

При использовании таблиц вероятностей $P(\chi^2 > \chi_{p;k}^2)$ необходимо учесть, что $P(\chi^2 < \chi_1^2) = 1 - P(\chi^2 > \chi_1^2)$, поэтому условие $P(\chi^2 < \chi_1^2) = \frac{1-P}{2}$ равносильно условию $P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - \frac{1-P}{2} = \frac{1+P}{2}$. Таким образом, значения χ_1^2 и χ_2^2 находим по таблице 3 Приложения 2 из равенств:

$$P(\chi^2 > \chi_1^2) = \frac{1+P}{2}; \qquad P(\chi^2 > \chi_2^2) = \frac{1-P}{2}.$$

◆ Пример 4.33

Простроить доверительный интервал с вероятностью $P = 0{,}96$ для дисперсии $D(X)$ случайной величины X, распределенной по нормальному закону, если $S^2 = 20$, а $n = 25$.

Решение:

Доверительная вероятность $P = 0{,}96$.

Тогда $(1 + 0{,}96) : 2 = 0{,}98$; $(1 - 0{,}96) : 2 = 0{,}02$.

По таблице 3 при $P = 0{,}98$ и $k = 25 - 1 = 24$ находим значение $\chi_1^2 = 12{,}0$; при $P = 0{,}02$ и $k = 24$ — значение $\chi_2^2 = 40{,}3$.

Тогда доверительный интервал можно записать в следующем виде:

$$\frac{(25-1)20}{40{,}3} \le D(X) \le \frac{(25-1)20}{12};$$

$$11{,}9 \le D(X) \le 40.$$

◆ Пример 4.34

Количество деталей, изготавливаемых ежедневно рабочим на протяжении 12 дней, равно:

289, 203, 359, 243, 232, 210, 251, 246, 224, 239, 220, 211.

Найти точечные и интервальные оценки ($P = 0{,}9$) математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности.

Решение:

$$\bar{x} = \frac{289 + 203 + \ldots + 211}{12} = 244.$$

$$S^2 = \frac{(289-244)^2 + (203-244)^2 + \ldots + (211-244)^2}{11} = 1849.$$

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1849}{12}} = 12{,}4;\ t_{0.9,11} = 1{,}8.$$

$$244 - 12{,}4 \cdot 1{,}8 \le M(X) \le 244 + 12{,}4 \cdot 1{,}8;$$

$$221{,}68 \le M(X) \le 266{,}32.$$

Для определения доверительного интервала дисперсии найдем $P_1 = \frac{1+0{,}9}{2} = 0{,}95$; $P_2 = 0{,}05$.

Соответственно $\chi_1^2 = 4{,}58$, $\chi_2^2 = 19{,}7$.

$$\frac{(12-1)\cdot 1849}{19{,}7} \le D(X) \le \frac{(12-1)1849}{4{,}58};$$

$$1032{,}4 \le D(X) \le 4440{,}8.$$

Задания для самостоятельного решения

61. В результате испытания случайная величина X приняла следующие значения: 2, 6, 8, 4, 2, 5, 7, 6, 4, 4, 1, 5, 7, 6, 3, 1, 3, 5, 5, 3. Построить дискретный вариационный ряд и начертить полигон распределения.

62. В результате испытания случайная величина X приняла следующие значения: 11, 13, 18, 22, 24, 12, 23, 15, 18, 17, 12, 18, 19, 20, 12, 22, 16, 17, 14, 20, 21, 25, 27, 19. Построить дискретный вариационный ряд с равными интервалами и начертить гистограмму.

63. Абитуриентами на вступительных экзаменах были набраны следующие суммы баллов: 20, 21, 17, 20, 19, 24, 22, 21, 22, 21, 20, 18, 24, 18, 16, 22, 21, 23, 18, 21, 18, 21, 23, 19, 20, 25, 17, 20, 17, 22, 20, 24, 21, 20, 16, 21, 17, 19, 15, 20, 19, 21, 23, 18, 20, 24, 23, 21, 19, 22, 21, 19, 20, 23, 22, 25, 21, 21. Построить дискретный вариационный ряд, найти моду и медиану.

64. Дан вариационный ряд: 3, 6, 6, 8, 8, 12, 12, 12, 25, 25, 70, 75. Найти медиану.

65. Значения случайной величины X представлены в виде статистического распределения:

Значения X	Частота	Значения X	Частота
120–140	1	200–220	53
140–160	6	220–240	24
160–180	19	240–260	16
180–200	58	260–280	3

Найти моду и медиану этого распределения.

66. Из генеральной совокупности извлечена выборка объемом $n = 50$.

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Найти точечные оценки математического ожидания и генеральной дисперсии.

67. Пять измерений некоторой величины дали следующие результаты: 92, 94, 103, 105, 106. Найти выборочное среднее, выборочную и исправленную выборочную дисперсию.

68. Из общего числа студентов выборочно измерен рост у 81 мужчины. Средний рост оказался равным 171 *см* с дисперсией $S^2 = 64$ *см*^{2}. Определить ошибку выборочного среднего и коэффициент вариации.

69. Количественный признак X распределен нормально. По выборке объемом 18 найдено выборочное среднее значение 21,5 и среднее квадратическое отклонение $S = 0{,}9$. Найти коэффициент вариации, ошибку выборочного среднего и доверительный интервал для математического ожидания при уровне значимости $\alpha \le 0{,}05$.

70. По данным девяти независимых равноточных измерений физической величины найдено среднее арифметическое результатов отдельных наблюдений $\bar{x} = 41{,}21$ и исправленная дисперсия $S^2 = 25$. Найти коэффициент вариации, ошибку выборочного среднего и доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью $p \ge 0{,}99$.

71. Изучали рост мужчин 25 лет для сельской местности. Объем выборки $n = 21$. По данным статистической обработки имеем:

Границы интервалов (см)	161–165	165–169	169–173	173–177	177–181
Относительная частота	0,04	0,19	0,47	0,19	0,09

Выборочное среднее $\overline{x} = 171{,}42$; выборочное среднее квадратическое отклонение $S = 3{,}6$. Построить гистограмму распределения частот и определить доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью $p \geq 0{,}95$.

72. Изучали воздействие определенной физиопроцедуры на частоту сердечных сокращений в группе испытуемых. Объем выборки 18. По данным статистической обработки имеем:

Границы интервалов (уд./мин)	67–68,2	68,2–69,4	69,4–70,6	70,6–71,8	71,8–73
Относительная частота	0,05	0,16	0,44	0,22	0,05

Выборочное среднее $\overline{x} = 70{,}16$; выборочное среднее квадратическое отклонение $S = 1{,}2$. Построить гистограмму и определить доверительный интервал для математического ожидания с уровнем значимости $\alpha \leq 0{,}05$.

73. Признак X генеральной совокупности распределен нормально. Данные выборки имеют следующее статистическое распределение:

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
m_i	2	4	7	6	1

Найти выборочное среднее $\overline{x}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение S.

74. Построить доверительный интервал с уровнем значимости $\alpha \leq 0{,}1$ для дисперсии $D(X)$ случайной величины X, имеющей нормальный закон распределения, если $S^2 = 30$, $n = 40$.

Литература

1. *Белявский С.С., Широкова Н.А.* Высшая математика. Решение задач. — Минск: Высшая школа, 2004. — 285 с.

2. *Богомолов А.М., Салий В.Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. — М.: Наука, Физматлит, 1997. — 368 с.

3. *Воробьева Г. Н., Данилова А.Н.* Практикум по вычислительной математике. — М.: Высшая школа, 1990. — 207 с.

4. *Данко П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для вузов. Ч. 2. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. — 6-е изд. — М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и Образование, 2003. — 416 с.

5. *Данко П.Е., Попов А.Г.* Высшая математика в упражнениях и задачах. — М.: Высшая школа, 1974. — 415 с.

6. *Демидович Б.П., Моданов В.П.* Дифференциальные уравнения. — СПб.: Иван Федоров, 2003. — 287 с.

7. *Калинина В.Н.* Математическая статистика: учебник для студентов средних специальных учебных заведений / В.Н. Калинина, В.Ф. Панкин. — 4-е изд., испр. — М.: Дрофа, 2002. — 336 с.

8. *Кремер Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. — 546 с.

9. *Мацкевич И.П. и др.* Сборник задач и упражнений по высшей математике: учеб. пособие / И.П. Мацкевич, Г.П. Свирид, Г.М. Булдык; под общ. ред. Г.П. Свирида. — Минск: Высшая школа, 1996. — 318 с.

10. *Омельченко В.П., Курбатова Э.В.* Практические занятия по высшей математике. — Ростов н/Д: Феникс, 2003. — 256 с.

11. *Протасов М.Д.* Лекции по вычислительной математике. — М.: Гелиос АРВ, 2004. — 184 с.

12. Сборник задач по методам вычислений / под. ред. П.И. Монастырского. — Минск: БГУ, 1983. — 287 с.

13. *Шипачев В.С.* Задачник по высшей математике. — М.: Высшая школа, 2003. — 303 с.

14. *Шипачев В.С.* Курс высщей математики. — М.: Проспект, 2004. — 600 с.

Приложения

Приложение 1

Ответы к заданиям для самостоятельной подготовки

Глава 2

1. 3. **2**. 4. **3**. 1. **4**. 2. **5**. 4. **6**. 2. **7**. 1. **8**. ∞. **9**. $\frac{4}{7}$. **10**. 1. **11**. 0. **12**. 2. **13**. $\frac{1}{3}$. **14**. 0. **15**. $\frac{1}{2}$. **16**. 14 лет. **17**. 64% . **18**. $(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$. **19**. $[-2, 2]$. **20**. $(-\infty, -3)\cup(-3, +\infty)$. **21**. $(-\infty, -1)\cup(-1, 1)\cup(1, +\infty)$. **22**. R. **23**. $(-\infty, 0)\cup(0, 4)\cup(4, +\infty)$. **24**. $(-\infty, 6)$. **25**. $\{0\}$. **26**. $(-1, 1)$. **27**. $(1, \infty)$. **28**. $(-\infty, \infty)$. **29**. $(-\infty, \infty)$. **30**. $(-\infty, \frac{2}{3})\cup(\frac{2}{3}, \infty)$. **31**. $(-\infty, -3]\cup[3, \infty)$. **32**. $[3, \infty)$. **33**. $(6, \infty)$. **34**. $(0, \infty)$. **35**. $[0, 2]$. **36**. Четная. **37**. Нечетная. **38**. Четная. **39**. Нечетная. **40**. Ни четная, ни нечетная. **41**. Ни четная, ни нечетная. **42**. $P_0 = 4$, нет. **43**. $P_0 = 2$, да. **44**. –5. **45**. 1. **46**. $-\frac{2}{3}$. **47**. 6 **48**. 0. **49**. 1. **50**. ∞. **51**. 3. **52**. 1. **53**. ∞. **54**. ∞. **55**. 0. **56**. 2. **57**. $\frac{3}{5}$. **58**. 1. **59**. 7. **60**. 8. **61**. 2. **62**. $\frac{3}{5}$. **63**. 1. **64**. $\frac{1}{3}$. **65**. $\frac{3}{4}$ (числитель и знаменатель дроби умножить на x). **66**. 1. **67**. $-2(\sin 6x - \sin 8x = -2\cos 7x \sin x)$. **68**. e. **69**. e (замена $\alpha = 2x^2$). **70**. e (замена $\alpha = e^x$). **71**. $\frac{1}{2}$. **72**. $e^{\frac{9}{2}}$. **73**. e^4. **74**. $x = -2$, второго. **75**. $x = 0$, второго. **76**. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in z$, второго. **77**. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in z$, второго. **78**. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in z$, второго. **79**. $x_1 = 1$, второго; $x_2 = 2$, второго. **80**. $x_1 = 2$, устранимый; $x_2 = 1$, второго. **81**. R. **82**. R, кроме $x = 0$ **83**. $x > 0$. **84**. R, кроме $x = 0$. **85**. R. **86**. R, кроме $x = 1$. **87**. R, кроме $x = 0$. **88**. $[0, 2)\cup(2, \infty)$. **89**. $\frac{1}{4}$.

90. 0. **91**. e^2. **92**. $\sqrt[3]{e}$. **93**. $\frac{1}{e}$. **94**. 2. **95**. $\sqrt[3]{e}$. **96**. $\sqrt{e}$. **97**. $\frac{1}{e^2}$.

98. $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{10}{3\sqrt[3]{x}}+1$. **99**. $2e^x-2^x\ln 2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x\ln 10}$.

100. $20e^{5x-1}$. **101**. e^x-e^{-x}. **102**. $3x^2\sin x+x^3\cos x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

103. $2\sin^3 2x\cdot\cos 2x$. **104**. $\frac{1-\ln x}{x^2}$. **105**. $\frac{x+\sin x}{\cos^2 x}$.

106. $-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^3}$. **107**. $-3\,\mathrm{tg}\,3x+\frac{2}{x(1-x^2)}$.

108. $3^x\ln 3+2x\,\mathrm{tg}\,x+\frac{x^2}{\cos^2 x}$. **109**. $1-\left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)^2$.

110. $x^2\cdot 3x(3+x\ln 3)$. **111**. $\frac{-6}{\sqrt{1-9x^2}}$.

112. $2\cos(2x-1)e^{ax}+a\sin(2x-1)e^{ax}$. **113**. $-\ln x$. **114**. $\frac{2}{x}$.

115. $-\frac{t+2}{t^3}$. **116**. 7,3 *м/с*. **117**. 11 *м/с*. **118**. –2 *м/с*^{2}. **119**. 30 *Н*.

120. 43 *А* **121**. 0,24 *с* **122**. 42 *рад/с*. **123**. 10 *К/с*.

124. $\frac{dc}{dt}=-0{,}1e^{-0{,}05t}$ «–» — убывание концентрации, 20 *с*.

125. $\frac{100}{(1+5t)^2}$. **126**. $\frac{dM}{dt}=10t+6$. **127**. $\frac{dq}{dt}=\frac{q_0}{Rc}e^{-\frac{1}{Rc}}$; $\tau=Rc$;

$\left(\frac{dq}{dt}\right)_{t=0}=\frac{q_0}{Rc}$. **128**. K — быстрота роста числа клеток.

С ростом K график становится круче. **129**. $E_D=E_S=0{,}8$.

Уменьшится на 2,5%. **130**. $\mathrm{ctg}\sqrt{x}\,\frac{dx}{2\sqrt{x}}$. **131**. $-\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

132. $\frac{-2xdx}{1-2x^2}$. **133**. $(e^x+1)dx$. **134**. $\frac{3}{\cos^2 3x}(tg^2 3x+1)dx$.

135. $\frac{22dx}{(4x+3)^2}$. **136.** $-\frac{2xdx}{(x^2+1)^2}$. **137.** $\frac{4\ln x^2}{x}dx$.

138. $2\arcsin x\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **139.** $du = 2xdx + 5dy$.

140. $du = \frac{dx}{z} + \frac{2ydy}{z} + \frac{x+y^2}{z^2}dz$. **141.** $du = 4\cos(x+y)(dx+dy)$.

142. $du = 6(x^2+4y)(2xdx+4dy)$. **143.** $du = 8e^{xy}(ydx+xdy)$.

144. $du = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$. **145.** $du = e^x(ydx+dy)$.

146. $du = \frac{2xdx+dy-dz}{2\sqrt{x^2+y-z}}$. **147.** 0. **148.** 1. **149.** 2. **150.** $\frac{1}{4}$. **151.** 0.

152. 0. **153.** $\frac{3}{5}$. **154.** 0. **155.** 0. **156.** 0. **157.** 2. **158.** $\frac{1}{3}$.

159. $e^{-1}\sum\frac{x^{2k}}{k!} + r_{2n+1}(x)$, надо представить $e^{x^2-1} = e^{-1}e^{x^2}$.

160. $\cos 1\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^{2k}\cdot x^{2k}}{(2k)!} + \sin 1\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^{2k+1}\cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+1}(x)$,

надо представить $\cos(2x-1) = \cos 2x\cdot\cos 1 + \sin 2x\cdot\sin 1$.

161. $1+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{e^k k} + r_n(x)$; $\ln(e+x) = \ln\left[e\left(1+\frac{x}{e}\right)\right] =$

$= 1 + \left[\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)\right]$. **162.** $x + \frac{x^3}{3} + r(x^3)$. **163.** $1 - x + \frac{x^2}{2} + r(x^3)$.

164. $\frac{1}{3}$. **165.** 2. **166.** $\frac{1}{2}$. **167.** 1. **168.** $(-\infty, 2)$ — выпуклость вверх, $(2, \infty)$ — выпуклость вниз, $x = 2$ — точка перегиба.
169. $(-\infty, -\sqrt{3})$ — выпуклость вверх, $(\sqrt{3}, \infty)$ — выпуклость вверх, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ — выпуклость вниз, $x = -\sqrt{3}$ и

$x=\sqrt{3}$ —точки перегиба. **170**. При всех $x \in R$ функция выпукла вниз. **171**. $(-\infty, 0)$ — выпуклость вверх, $(0, \infty)$ — выпуклость вниз, $x = 0$ — точка перегиба. **172**. $(-\infty, -3)$ — выпуклость вверх, $(-3, 0)$ — выпуклость вниз, $(0, \infty)$ — выпуклость вниз, $x = -3$ — точка перегиба, в точке $x = 0$ функция не определена. **173**. $x = 0$ — вертикальная асимптота, $y = 0$ — горнзонтальная асимптота. **174**. $x = 1$ — вертикальная асимнтота, $y = x + 4$ — наклонная асимнтота. **175**. $y = x + 2$ — наклонная асимптота, $y = -x - 2$ — наклонная асимптота.

176. $x=0$; $y=3$ при $x \to \pm\infty$. **177**. $x = 2$. **178**. $x = \pm 1$; $y = x + 3$ при $x \to \infty$; $y = -x - 1$ при $x \to -\infty$. **179**. 1) ООФ: $x \in R$;
2) нечетная, непериодическая; 3) точек разрыва нет; точкн пересечения графика функции с осями координат (0, 5); (1, 0); $\left(\frac{-7+\sqrt{45}}{2}, 0\right)$; $\left(\frac{-7-\sqrt{45}}{2}, 0\right)$; 4) минимум $y = -11$ в точке $x = 2$, макснмум $y = 21$ в точке $x = -2$; 5) на интервалах $(-\infty, -2)$ $(2, +\infty)$ — функция возрастает, на интервалах $(-2, 2)$ — убывает; 6) на интервале $(-\infty, 0)$ — функция выпукла вверх, на интервале $(0, +\infty)$ — выпукла вниз, $x = 0$ — точка нерегиба; 7) асимптот нет. **180**. 1) ООФ: $x \in R$;
2) функция четная, непериодическая; 4) точек разрыва нет, точки пересечения графика функции с осями координат (0, 10); $(\pm 1, 0)$; $(\pm 3, 0)$; 4) минимум $y = -15$ в точках $x = \pm\sqrt{5}$, максимум $y = 10$ в точке $x = 0$; 5) на интервалах $(-\sqrt{5}, 0)$, $(\sqrt{5}, +\infty)$ функция возрастает, на интервалах $(-\infty, -\sqrt{5})$, $(0, \sqrt{5})$ — убывает; 6) на интервалах $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, +\infty\right)$ функция выпукла вниз, на интервале $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ — выпукла вверх, $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$ – точка перегиба; 7) асимптот нет.

181. 1) ООФ: $(-\infty, -2)\cup(-2, +\infty)$; 2) функция ни четная, ни нечетная, непериодическая; 3) разрыв 2-го рода в точке $x = -2$, точки пересечения графика функции с осями координат (0, 2), $(-\frac{4}{3}, 0)$; 4) экстремумов нет; 5) на интервалах $(-\infty, -2)$; $(-2, +\infty)$ функция возрастает; 6) на интервале $(-2, +\infty)$ функция выпукла вверх, на интервале $(-\infty, -2)$ — выпукла вниз; точек перегиба нет; 7) $x = -2$ — вертикальная асимптота, $y = 3$ — горизонтальная асимптота при $x \to \pm\infty$.

182. 1) ООФ $x \in R$; 2) функция ни четная, ни нечетная, непериодическая; 3) точек разрыва нет, точка пересечения графика функции с осями координат (0, 0); 4) минимум $y = 0$ в точке $x = 0$, максимум $y = 4e^{-2}$ в точке $x = 2$; 5) на интервале (0, 2) функция возрастает, на интервалах $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ — убывает; 6) на интервалах $(-\infty, 2-\sqrt{2})$, $(2+\sqrt{2}, +\infty)$ — функция выпукла вниз, на интервале $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ — выпукла вверх, $x = 2\pm\sqrt{2}$ — точки перегиба; 7) $y = 0$ — горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$.

183. 1) ООФ: $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$; 2) функция ни четная, ни нечетная, непериодическая; 3) разрыв 2-го рода в точке $x = 0$; 4) минимум $y = \frac{9+17\sqrt{17}}{16}$ в точке $x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, максимумы $y = \frac{9-17\sqrt{17}}{16}$ в точке $x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ и $y = 5$ в точке $x = 1$;

5) на интервалах $(-\infty, \frac{-1-\sqrt{17}}{2})$, (0, 1) и $(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, +\infty)$ функция возрастает, на интервалах $(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, 0)$, $(1, \frac{-1+\sqrt{17}}{2})$ — убывает; 6) на интервалах $(-\infty, 0)$ и (0, 1,2) функция выпукла вверх, на интервале (1,2, $+\infty$) — выпукла вниз, $x = 1{,}2$ — точка перегиба; 7) $x = 0$ — вертикальная асимптота, $y = x + 1$ — наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$.

184. 1) ООФ: $(0, +\infty)$; 2) функция ни четная, ни нечетная, непериодическая; 3) точек разрыва нет, точка пересечения графика функции с осями координат $(1, 0)$; 4) минимум $y = -e\ln 2$ в точке $x = \sqrt{e}$; 5) на интервале $(\sqrt{e}, +\infty)$ функция возрастает, на интервале $(0, \sqrt{e})$ — убывает; 6) на интервале $(e^{-2/3}, +\infty)$ — функция выпукла вверх, на интервале $(0, e^{-2/3})$ — выпукла вниз, $x = e^{-2/3}$ — точка перегиба; 7) асимптот нет. **185**. 1) ООФ: $(0, +\infty)$; 2) функция ни четная, ни нечетная, непериодическая; 3) точек разрыва нет; 4) минимум $y = 1$ в точке $x = 1$; 5) на интервале $(1, +\infty)$ функция возрастает, на интервале $(0, 1)$ — убывает; 6) на интервале $(0, +\infty)$ функция выпукла вниз, точек перегиба нет; 7) $x = 0$ — вертикальная асимптота.
186. 1) ООФ: $(-\infty, 2)\cup(2, +\infty)$; 2) функция ни четная, ни нечетная, непериодическая; 3) разрыв 2-го рода в точке $x = 2$, точки цересечения графика функции с осями координат $(0, 0)$, $(\frac{3}{2}, 0)$; 4) минимум $y = 1$ в точке $x = 1$, минимум $y = 9$ в точке $x = 3$; 5) на интервалах $(-\infty, 1)$, $(3, +\infty)$ функция возрастает; на интервалах $(1, 2)$, $(2, 3)$ — убывает; 6) на интервале $(-\infty, 2)$ функция выпукла вверх, на нинтервале $(0, +\infty)$ — выпукла вниз, точек перегиба нет; 7) $x = 2$ — вертикальная асимптота, $y = 2x + 1$ — наклонная асимптота. **187**. $\frac{2}{3}\sin x + C$. **188**. $6\sqrt{x} - \frac{1}{x} + C$.

189. $\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x + C$. **190**. $\frac{x^4}{4} - x^2 + x^3 - 6x + C$.

191. $-2x^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2\ln|x| + C$. **192**. $-2\cos + 6x - x^3 + C$.

193. $\frac{2}{3}\sin\frac{3x}{2} + C$. **194**. $-\frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

195. $-\operatorname{ctg} x - 2 + C$. **196.** $-\frac{1}{b}\operatorname{tg}(a-bx)+C$.

197. $-\frac{1}{6}\cos 3x^3 + C$. **198.** $-\frac{1}{2}\operatorname{tg}(1-2x)+C$.

199. $-\frac{1}{7}\operatorname{ctg} 7x + C$. **200.** $-\frac{1}{3}\ln|3x| + C$. **201.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5}{3}}x + C$.

202. $\frac{1}{2}\ln\left|25+x^2\right| + C$. **203.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{3}} + C$.

204. $-\sqrt{1+2\cos x} + C$. **205.** $(2-x^2)\cos x + 2x\sin x + C$.

206. $\frac{1}{3}(4-x)\sin 3x - \frac{1}{9}\cos 3x + C$. **207.** $q(t) == -\frac{J_{\max}}{\omega}\cos\omega t$.

208. $v = \frac{t^3}{2} + 8$; $S = \frac{t^4}{8} + 8t$. **209.** $v = t^2 + 1$. **210.** $S = \frac{t^3}{6} + 3t - 14$.

211. $v = t^3 - 2t^2 + 8$. **212.** $F(x) = \frac{1}{3}x^2 - x + 2$.

213. $F(x) = 5\ln(x-3) + 2$. **214.** $F(x) = -\sin x - \cos x + 5\sqrt{2}$.

215. $\varphi = 2t^3 - 2t^2 + 5t - 16$. **216.** $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. **217.** $e-1$. **218.** $\frac{\pi}{12}$.

219. 1,5. **220.** $4e$. **221.** $\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4}$. **222.** $\frac{8}{3}$. **223.** $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$. **224.** 6,5.

225. $\frac{3}{2}\ln\frac{4}{3}$. **226.** $\frac{1}{4}$. **227.** $\frac{5}{9}\left(1-2^{\frac{5}{3}}\right)$. **228.** $\frac{2}{3}\pi$. **229.** 4.

230. $-\frac{1}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-3}$. **231.** $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{3}$. **232.** $\frac{1}{2}$. **233.** 168,2.

234. 2. **235.** $\frac{1}{3\ln 2}\left(2^{18} - 2^9\right)$. **236.** $\frac{1}{2}$. **237.** $7\arcsin\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$. **238.** 0.

239. 0,21. **240.** $\frac{\pi}{2}$. **241.** 4. **242.** $1{,}6 \cdot 10^{-3}$ *Кл*. **243.** 8,8 *кв. ед*.

244. 8,5 *кв. ед.* **245**. 1 *кв. ед.* **246**. $\frac{1}{3}$ *кв.ед.* **247**. $\frac{\pi}{4}$ *кв. ед.*

248. 797500 *кВт·ч.* **249**. Да. **250**. Да. **251**. Да.

252. $|y+1| = \frac{C}{|\cos x|}$. **253**. $y = Cx$. **254**. $x^2 + y^2 = C^2$.

255. $y = Ce^{\frac{1}{x}}$. **256**. $y = Ce^x$. **257**. $y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + C$.

258. $-e^{-y} = \frac{1}{3}e^{3x} + C$. **259**. $|y| = 5e^x$. **260**. $y = -5\sqrt[4]{x}$.

261. $2x^2 - 2y^2 + x + 29 = 0$. **262**. $y = e^{\sqrt{x}-2}$. **263**. $y = \frac{4x}{3x-4}$.

264. $y^2 = 2\ln\left[\frac{\sqrt{e}}{2}\left(1+e^x\right)\right]$. **265**. $(y-2)(x+3) = 1$.

266. $y^2 = \frac{1}{3}(4 + 6x - 2x^3)$. **267**. $y = \frac{2x}{1+x}$. **268**. $y = Cx + x^2$.

269. $y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^3}$. **270**. $(2x + C)e^{-\frac{x^3}{3}}$. **271**. $y = (x^2 + C)e^x$.

272. $y = Ce^x - x - 1$. **273**. $y = 3 + \frac{C}{x}$. **274**. $y^2 = x^2 - C_1x$.

275. $y = xe^{C_1x}$. **276**. $4xy + x^2 = C$. **277**. $y = x^5 + Cx^2$.

278. $x = -y(1 + \ln|y|)$. **279**. $3y^2 = 8(x^2 - y^2)$.

280. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{4x}$. **281**. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$.

282. $y = e^{5x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$. **283**. $y = C_1e^{6x} + C_2e^{-x}$.

284. $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$. **285**. $y = -3e^{-2x}(\cos x + 2\sin x)$.

286. $y = -0{,}4e^{25(1-x)} + 20{,}4$. **287**. $y = 0{,}5e^x - 0{,}5e^{-x}$.

288. $y = -2 + 2e^{4x}$. **289**. $y = e^{-x}(\cos x + 2\sin x)$.

290. $y = -0{,}022e^{7x} + 0{,}23e^{5x}$. **291**. $m = m_0e^{-\frac{0{,}69}{T}t}$.

292. $x = 5{,}66x_0$. **293**. 4,2%. **294**. 30 °C. **295**. 25 *мг*.

296. $J = J_0e^{-1{,}38e}$. **297**. $N = 100e^{0{,}115t}$; 1600. **298**. 3000; 5000.

299. $U = 2(y^2 - x^2)$. **300**. 2). **301**. $+\infty$; расходится. **302**. $+\infty$; расходится. **303**. $\frac{4}{3}$; сходится. **304**. $+\infty$; расходится.

305. Сходится; надо сравнить с рядом $a_n = \frac{\frac{\pi}{2}+1}{n^2}$.

306. Расходится; надо сравнить с рядом $a_n = \left(\frac{5}{2}\right)^n$.

307. Сходится; $a_n = \frac{1}{n^2}$. **308**. Расходится; 2. **309**. Сходится; $\frac{1}{3}$.

310. Сходится; 0. **311**. Сходится; $\frac{1}{4}$. **312**. Расходится; $\frac{3}{2}$.

313. Расходится; *e* **314**. Сходится; $\frac{1}{2}$. **315**. Сходится; $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

316. Сходится; 0. **317**. Расходится; $\frac{3}{2}$. **318**. Расходится (признак Даламбера). **319**. Сходится. **320**. Сходится (признак Даламбера). **321**. Сходится (признак Коши). **322**. Расходится (признак Коши). **323**. Расходится (признак Коши). **324**. Расходится (признак Даламбера). **325**. Сходится (признак Даламбера). **326**. Расходится; необходимый признак; 1. **327**. Расходится; признак Даламбера; $+\infty$. **328**. Сходится условно; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n}$. **329**. Сходится абсолютно; признак Коши; $\ln 2$.

330. Сходится абсолютно; 1-й признак сравнения; $\frac{1}{n^2}$.

331. Расходится; необходимый признак; $\ln 2$. **332**. Сходится абсолютно; признак Даламбера; $\frac{1}{2}$. **333**. Расходится; использовать признак сравнения. **334**. Два интервала $(-\infty; -1)$

и (1; +∞), это геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{1}{x}$. **335**. 1). **336**. 3). **337**. 4). **338**. 3). **339**. [–2, 0].

340. (–3; 1]. **341**. $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **342**. $e^{-x^3} = 1 - x^3 + \frac{x^6}{2!} + \ldots$

$+ (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!} + \ldots$ **343**. $\ln(1-2x) = -2x - \frac{2^2}{2}x^2 - \frac{2^3}{3}x^3 - \ldots$

$- \frac{2^n}{n}x^n - \ldots$ **344**. $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} - \ldots$

$+ (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} + \ldots$

Глава 3

37. $y'(x) = 3x^2 - 6x$. **38**. $y'(x) = 6x^2 + 2x$. **39**. $y'(x) = 9x^2 + x - 5$.
40. $y'(x) = 1{,}5x^2 + 4x + 3$. **41**. $y'(x) = 6x^2 - 2x + 6$.
42. $y'(x) = 12x^2 - 6x - 1$. **43**. $y'(x) = 3x^2 + 2x - 2$.
44. $y'(x) = 15x^2 - 8x + 1$. **45**. $y'(x) = 16x - 6$.
46. $y'(x) = 18x^2 - 2x + 3$. **47**. $y'(1{,}5) = -2{,}25$; $y''(1{,}5) = 3$.
48. $y'(2{,}5) = 42{,}5$; $y''(2{,}5) = 32$. **49**. $y'(1{,}25) = 10{,}3125$; $y''(1{,}25) = 23{,}75$. **50**. $y'(1{,}75) = 14{,}5938$; $y''(1{,}75) = 9{,}25$.
51. $y'(2{,}2) = 30{,}64$; $y''(2{,}2) = 22$. **52**. $y'(2{,}1) = 39{,}32$; $y''(2{,}1) = 44{,}4$. **53**. $y'(2{,}25) = 17{,}6875$; $y''(2{,}25) = 15{,}5$.
54. $y'(2{,}75) = 92{,}4375$; $y''(2{,}75) = 74{,}5$. **55**. $y'(1{,}2) = 13{,}2$; $y''(1{,}2) = 16$. **56**. $y'(1{,}6) = 45{,}88$; $y''(1{,}6) = 49{,}2$.

Глава 4

1. $P(A) = 6/11$; $P(B) = 4/11$; $P(C) = 2/11$. **2**. 0,2. **3**. 1/4. **4**. 5/9.
5. 5/9. **6**. $P(A) = 1$; $P(B) = 1/5$; $P(C) = 3/5$. **7**. $P(A) = 1/2$; $P(B) = 2/3$. **8**. 1/6. **9**. $P(A) = 5/36$; $P(B) = 2/36$. **10**. 2/9.
11. $P(A) = 0{,}096$. **12**. $P(A) = 1/3$; $P(B) = 14/99$; $P(C) = 49/99$.
13. 0,5. **14**. 0,1. **15**. 0,924. **16**. 0,3. **17**. 0,7. **18**. 0,7. **19**. 0,107.

20. 0,97. **21**. 0,975. **22**. $P(A+B)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$. **23**. 5/6. **24**. $P=0,3$.
25. $\frac{470}{500}=0,94$. **26**. $P(A+B)=0,6$. **27**. $P=2/119$. **28**. $P=0,765$.
29. 0,54. **30**. 0,995. **31**. 1/9. **32**. 5/12. **33**. $\frac{6}{30}\cdot\frac{5}{29}=\frac{1}{29}$.
34. $0,95^3=0,857$. **35**. 0,748. **36**. $P(A_1,\overline{A}_2,\overline{A}_3)=0,8\cdot 0,1\cdot 0,2=$
$=0,016$. **37**. $P(DD)=\frac{1}{4}$. **38**. $P(D)=1-P(\overline{A}_1,\overline{A}_2,\overline{A}_3)=$
$=1-0,2\cdot 0,1\cdot 0,2=0,996$. **39**. $P=0,7$. **40**. $P=0,18$. **41**. $M(X)=$ 6,4; $\sigma(X)=3,61$. **42**. 67,64. **43**. 3,69. **44**. 1,1. **45**. $M(X)=3,9$; $D(X)=1,89$. **46**. 1,05. **47**. $P_4=0,2$; $M(X)=0,6$; $D(X)=0,048$.
48. $P_1=0,05$; $P_3=0,2$; $M(X)=5,7$; $D(X)=1,51$. **49**. $f(x)=0$ при $x\le 0$ и $f(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ при $x>0$.

50. $f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ \frac{2x-1}{2} \text{ при } 1<x\le 2,\\ 0 \text{ при } x>2.\end{cases}$ $M(X)=1,5833$

51. $f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ 2x \text{ при } 0<x\le 1,\\ 0 \text{ при } x>1.\end{cases}$ $M(X)=0,6667$

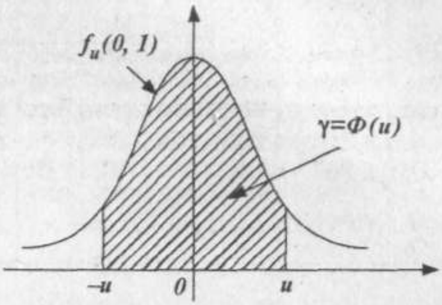
52. $a=2/9$; $P=13/27$. **53**. $P=0,75$. **54**. $a=5$; $F(x)=0$ при $x<0$; $F(x)=0,5(1-\cos x)$ при $0\le x\le\pi$; $F(x)=1$ при $x>\pi$.
55. $a=1/4$; $M(X)=16/15$. **56**. $M_0=15$. **57**. $P(4<x<6)=$ $=\frac{6-4}{8-3}=\frac{2}{5}$. **58**. $a=\lambda$. **59**. $P(30<x<80)=0,758$.
60. $P(x>1250)=0,02276$; $P(x<850)=0,2514$; $P(800<x<1300)=0,8314$. **63**. 21; 21. **64**. Me = 12. **65**. 197,73; 202, 26. **66**. $\overline{x}=5,76$; $S^2=10,15$. **67**. $\overline{x}=100$; $D(X)=34$; $S^2=42,5$. **68**. 0,89; 4,7%. **69**. 4,2%; 0,2; $21,05\le M(X)\le 29,95$.
70. 12%; 1,67; $35,6\le M(X)\le 46,8$. **71**. $169,8\le M(X)\le 173,1$.
72. $69,57\le M(X)\le 70,75$. **73**. $\overline{x}=0,3$; $S=0,1076$.
74. $26,7\le D(X)\le 63,2$.

Приложение 2

Таблица 1

Значение функции Лапласа

$$\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0080	0,0160	0,0238	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0638	0,0717
0,1	0797	0876	0955	1034	1113	1192	1271	1350	1428	1507
0,2	1585	1663	1741	1819	1897	1974	2051	2128	2205	2282
0,3	2358	2434	2510	2586	2661	2737	2812	2886	2960	3035
0,4	3108	3182	3255	3328	3401	3473	3545	3616	3688	3759
0,5	3829	3899	3969	4039	4108	4177	4245	4313	4381	4448
0,6	4515	4581	4647	4713	4778	4843	4907	4971	5035	5098
0,7	5161	5223	5285	5346	5407	5467	5527	5587	5646	5705
0,8	5763	5821	5878	5935	5991	6047	6102	6157	6211	6265
0,9	6319	6372	6424	6476	6528	6579	6629	6679	6729	6778
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7063	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,1	7287	7330	7373	7415	7457	7499	7540	7580	7620	7660
1,2	7699	7737	7775	7813	7850	7887	7923	7959	7994	8029
1,3	8064	8098	8132	8165	8198	8230	8262	8293	8324	8355
1,4	8385	8415	8444	8473	8501	8529	8557	8584	8611	8638
1,5	8664	8690	8715	8740	8764	8789	8812	8836	8859	8882
1,6	8904	8926	8948	8969	8990	9011	9031	9051	9070	9090
1,7	9109	9127	9146	9164	9181	9189	9216	9233	9249	9265
1,8	9281	9297	9312	9327	9342	9357	9371	9385	9399	9412
1,9	9426	9439	9451	9464	9476	8488	9500	9512	9523	9534
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9616	0,9625	0,9634
2,1	9643	9651	9660	9668	9676	9684	9692	9700	9707	9715
2,2	9722	9729	9736	9743	9749	9756	9762	9768	9774	9780
2,3	9786	9791	9797	9802	9807	9812	9817	9822	9827	9832
2,4	9836	9841	9845	9849	9853	9857	9861	9865	9869	9872
2,5	9876	9879	9883	9886	9889	9892	9895	9898	9901	9904
2,6	9907	9910	9912	99915	99917	99920	9922	9924	9926	9928

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,7	9931	9933	9935	9937	9938	9940	9942	9944	9946	9947
2,8	9949	9951	9952	9953	9955	9956	9958	9959	9960	9961
2,9	9963	9964	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972
3.0	0,9973	0,9974	0,9975	0,9976	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980
3.1	9981	9981	9982	9983	9983	9984	9984	9985	9985	9986
3,5	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997	9997
3,6	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998	9998	9998
3,7	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,9	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
4,0	0,999936	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
4,5	0,999994	–	–	–	–	–	–	–	–	–
5,0	0,99999994	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Таблица 2

Значения t_γ, определяемые уравнением

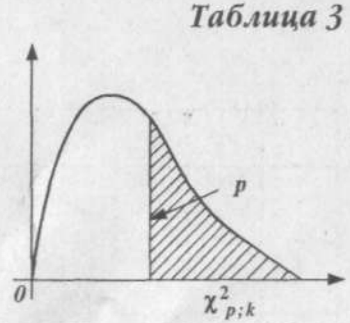
$$P = \left(|t(k)| < t_\gamma\right) = \gamma$$

f \ P	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,816	1,061	1,336	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	741	941	1,190	1,533	2.132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	727	920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4.032	6,859
6	718	906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	711	896	1,119	1,415	1,895	2.365	2,998	3,499	5,405
8	706	889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	703	883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	700	879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	697	876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,487
12	695	873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	694	870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221

f \ P	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
14	692	868	1,076	1,345	1,761	2,145	2.624	2,977	4,140
15	691	866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	690	865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	689	863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	688	862	1,067	1,330	1,734	2,103	2,552	2,878	3,922
19	688	861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	687	860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	686	859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	686	858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	685	858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	685	857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	684	856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	684	856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	684	855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	683	855	1,056	1,313	1,701	2,048	2.467	2,763	3,674
29	683	854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	683	854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	681	851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	679	848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	677	845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	674	842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Таблица 3

Значения $\chi^2_{p;k}$ критерия Пирсона



Число степеней свободы	Вероятность p												
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,00	0,00	0,00	0,02	0,06	0.15	0,45	1,07	1,64	2,71	3,84	5,41	6,64
2	0,02	0,04	0,10	0,21	0,45	0,71	1,39	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21

число степеней свободы	Вероятность p												
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
3	0 11	0,18	0,35	0,58	1,00	1 4?	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9 84	11,3
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,7	13,3
5	0.55	0.75	1,14	1,61	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11.1	13,4	15,1
6	0,87	1.13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,6	12,6	15,0	16,8
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,0	14,1	16,6	18.5
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,0	13,4	15,5	18,2	20.1
9	2.09	2,53	3,32	4.17	5,38	6,39	8,34	10,7	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6.18	7,27	9,34	11,8	13,4	16,0	18,3	21,2	23.2
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,3	12,9	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,3	14,0	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9,93	12,3	15,1	17,0	19,8	22.4	25,5	27,7
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,8	13,3	16,2	18,1	21,1	23,7	26,9	29,1
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,3	11,7	14,3	17,3	193	22,3	25,0	28,3	30,6
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,1	12,6	15,3	18,4	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0
17	6,41	7,26	8,67	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4
18	7,02	7,91	9,39	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6	22.8	26,0	28,9	32,3	34,8
19	7.63	8,57	10,1	11,6	13,7	15,3	18,3	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36.2
20	8,26	9,24	10,8	12,4	14,6	16.3	19.3	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6
21	8,90	9,92	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9	26,2	29.6	32,7	36,3	38,9
22	9,54	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9	27,3	30.8	33,9	37,7	40,3
23	10,2	11,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26.0	28,4	32,0	35,2	39,0	41.6
24	10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40.3	43,0
25	11.5	12,7	14,6	16.5	18,9	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3
26	12,2	13,4	15.4	17,3	19,8	21,8	25,3	29.2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6
27	12,9	14.1	16,1	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48.3
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6
30	14,9	16,3	18,5	20,6	23.4	25.5	29,3	33,5	36.2	40,3	43,8	48,0	50,9

Таблица 4

Значения f_γ, определяемые уравнением

$$P\left(F(l,k) < f_\gamma\right) = \gamma = 0,95$$

k	l									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,40	199,50	215,70	224,60	230,20	234,00	238,90	243,90	249,00	254,30
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5.05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,23	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2.91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2.69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,33	3,51	3,13	2,90	2,74	2.63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2.36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,83	1,61	1,25
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

Оглавление

Серия
• Среднее профессиональное образование •

Омельченко Виталий Петрович,
Курбатова Элеонора Владимировна

МАТЕМАТИКА

Издание 5-е, стереотипное

Ответственный за выпуск	*Кузнецов В.П.*
Корректор	*Подопригорина О.И.*
Художник	*Тимофеева Е.В.*
Компьютерная верстка:	*Машир Т.Г.*

Сдано в набор 12.05.2010 г. Подписано в печать 16.06.2010 г.
Формат 84x108 $^1/_{32}$. Бумага тип. № 2.
Гарнитура Таймс.
Тираж 3000 экз. Заказ № 649.

ООО «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону,
пер. Халтуринский, 80

Отпечатано с готовых диапозитивов в ЗАО «Книга».
344019, г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57.
Качество печати соответствует предоставленным диапозитивам.

ISBN 978-5-222-17602-3